Bilan 2^{nd} degré.
Corrigé.

Rappels : présentation soignée, exercices clairement séparés, résultats encadrés, tableaux à la règle et au crayon.

3 pts **EXERCICE 1** Écrire la forme canonique de :

$P(x) = x^2 - 8x + 1$ $\qquad$ $Q(x) = x^2 + 3x + 4$

$P(x) = (x-4)^2 - 16 + 1 = (x-4)^2 - 15$

$Q(x) = (x+1{,}5)^2 - 2{,}25 + 4 = (x+1{,}5)^2 + 1{,}75$

3 pts **EXERCICE 2** Factoriser avec la méthode de votre choix :

$P(x) = x^2 + 4x + 3$ $\qquad$ $Q(x) = 3x^2 + 3x - 6$

Avec sa forme canonique :

$P(x) = (x+2)^2 - 4 + 3 = (x+2)^2 - 1 = (x+2)^2 - 1^2 = (x+2-1)(x+2+1) = (x+1)(x+3)$

Avec le discriminant :

Pour Q, on a $\begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \\ c = -6 \end{cases}$ donc $\Delta = 9 - 4 \times 3 \times (-6) = 81 > 0$.

On calcule alors $x_1 = \dfrac{-3-\sqrt{81}}{2 \times 3} = \dfrac{-3-9}{6} = -2$ et $x_2 = \dfrac{-3+\sqrt{81}}{2 \times 3} = \dfrac{-3+9}{6} = 1$

donc $f(x) = 3(x-(-2))(x-1) = 3(x+2)(x-1)$

3 pts **EXERCICE 3** Résoudre avec la méthode de votre choix :

$5x^2 + 4x - 9 = 0$ $\qquad$ $4x^2 - 4x + 1 = 0$

Avec le discriminant :

Pour la première équation, on a $\begin{cases} a = 5 \\ b = 4 \\ c = -9 \end{cases}$ donc $\Delta = 16 + 180 = 196 > 0$.

On calcule alors $x_1 = \dfrac{-4-\sqrt{196}}{2 \times 5} = \dfrac{-4-14}{10} = -\frac{9}{5}$ et $x_2 = \dfrac{-4+\sqrt{196}}{2 \times 5} = \dfrac{10}{10} = 1$

On a donc $\mathscr{S} = \left\{-\frac{9}{5} ; 1\right\}$

Pour la seconde équation, on a $\begin{cases} a = 4 \\ b = -4 \\ c = 1 \end{cases}$ donc $\Delta = 16 - 16 = 0$.

On calcule alors $x_0 = \dfrac{-(-4)}{2 \times 4} = \dfrac{-(-4)}{8} = \dfrac{4}{8} = \frac{1}{2}$

On a donc $\mathscr{S} = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

4 pts **EXERCICE 4** Établir le tableau de signe de

$P(x) = x^2 + 3x - 10$ $\qquad$ $Q(x) = -5x^2 - 4x + 1$

Avec le discriminant : $\Delta = 9 + 40 = 49 > 0$ puis $x_1 = \dfrac{-3-7}{2} = -5$ et $x_2 = \dfrac{-3+7}{2} = 2$

On peut alors écrire :

x	$-\infty$		-5		2		$+\infty$
1		$+$		$+$		$+$	
$(x+5)$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$(x-2)$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Avec le discriminant : $\Delta = 16 + 20 = 36 > 0$ puis $x_1 = \dfrac{4-6}{-10} = \dfrac{1}{5}$ et $x_2 = \dfrac{4+6}{-10} = -1$

On peut alors écrire :

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{5}$		$+\infty$
-3		$-$		$-$		$-$	
$(x+1)$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$(x-\frac{1}{5})$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

4 pts **EXERCICE 5** Résoudre les inéquations suivantes :

$x^2 - 5x + 4 < 0$ $\qquad$ $(2x+3)(1-4x)(x+2) \geqslant 0$

Avec le discriminant : $\Delta = 25 - 16 = 9 > 0$ puis $x_1 = \dfrac{5-3}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{5+3}{2} = 4$

On peut alors écrire :

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
1		$+$		$+$		$+$	
$(x-1)$		$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$(x-4)$		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a donc $x^2 - 5x + 4 < 0$ si et seulement si $x \in]1;4[$

Pour $(2x+3)(1-4x)(x+2) \geqslant 0$, on peut déjà écrire :

x	$-\infty$		-2		$-\frac{3}{2}$		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$(2x+3)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$(1-4x)$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$(x+2)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
produit		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

On a donc $(2x+3)(1-4x)(x+2) \geqslant 0$ si et seulement si $x \in]-\infty;-2] \cup [-\frac{3}{2};\frac{1}{4}]$

3 pts **EXERCICE 6**

1) Montrer que $(x-2)(x^2+3x-10) = x^3+x^2-16x+20$

En développant, on a : $(x-2)(x^2+3x-10) = x^3+3x^2-10x-2x^2-6x+20 = x^3+x^2-16x+20$

2) Résoudre $x^3+x^2-16x+20=0$

$x^3+x^2-16x+20=0$ équivaut donc à $(x-2)(x^2+3x-10)=0$

or $(x-2)(x^2+3x-10)=0$ ssi $x=2$ ou $x^2+3x-10=0$

dans l'exercice 4, on a vu que $x^2+3x-10=0$ ssi $x=2$ ou $x=5$

finalement : $x^3+x^2-16x+20=0$ ssi $x \in \{2;2;5\}$

1 pts BONUS : résoudre $x^3+x^2-16x+20 = x^2+20$

$x^3+x^2-16x+20 = x^2+20$ ssi $x^3-16x=0$ ssi $x(x^2-16)=0$ ssi $x(x-4)(x+4)=0$

donc $x=0$ ou $x=-4$ ou $x=4$