Contrôle 2

EXERCICE 1 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5x + 2025$

1. Calculer $f'(x)$.

   $f(x) = x + 5$

2. Étudier les variations de f.

   $f'(x) = 0$ ssi $x = -5$ et f' est affine strictement croissante sur $\mathbb{R}$

   on a donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		-5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(-5)$	$\nearrow$	0

3. Montrer que f admet un minimum dont on donnera la position et la valeur exacte.

   f est strictement décrosisante sur $]-\infty; -5[$ puis strictement croissante sur $]-5; +\infty[$ et f est continue sur $\mathbb{R}$ donc f admet un minimum en $x = -5$ donc la valeur est $f(-5) = 2012{,}5$

EXERCICE 2 On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = (2x^2 + 10x - 5)e^{-2x}$

1. Résoudre $f(x) = 0$ et interpréter graphiquement le résultat.

   $f(x) = 0$ équivaut à $(2x^2 + 10x - 5)e^{-2x} = 0$ donc à $e^{-2x} = 0$ ou $2x^2 + 10x - 5 = 0$

   Comme $e^{-2x} \neq 0$, on résout $2x^2 + 10x - 5 = 0$

   $\Delta = 100 + 40 = 140 > 0$ il y a deux racines

   $x_1 = \dfrac{-10 - \sqrt{140}}{2 \times 2} < 0$ et $x_2 = \dfrac{-10 + \sqrt{140}}{2 \times 2} = -\dfrac{5}{2} + \dfrac{\sqrt{35}}{2} > 0$

   Comme f n'est définie que sur $\mathbb{R}^+$, on ne garde qu'une solution $S = \left\{-\dfrac{5}{2} + \dfrac{\sqrt{35}}{2}\right\}$

   La courbe représentant f ne coupe qu'une fois l'axe des abscisses, c'est en x_2

2. Montrer que $f'(x) = -4(x - 1)(x + 5)e^{-2x}$.

   f est un produit $u \times v$ de dérivée $u' \times v + u \times v'$

ici $u = 2x^2 + 10x - 5$ donc $u' = 4x + 10$

et $v = e^{-2x}$ donc $v' = e^{-2x} \times (-2)$

Cela donne : $f'(x) = (4x+10)e^{-2x} + (2x^2+10x-5)e^{-2x}(-2) = e^{-2x} \times (4x+10-4x^2-20x+10)$

En ordonnant les termes, on a : $f'(x) = e^{-2x} \times (-4x^2 - 16x + 20)$

Factorisons ce trinôme. On a : $\Delta = (-16)^2 - 4 \times (-4) \times 20 = 256 + 320 = 576 = 24^2 > 0$

Il y a deux racines : $x_1 = \dfrac{-(-16) - 24}{2 \times (-4)} = 1$ et $x_1 = \dfrac{-(-16) + 24}{2 \times (-4)} = -5$

La factorisation est alors $-4x^2 - 16x + 20 = -4 \times (x-1)(\times(x-(-5)) = -4(x-1)(x+5)$

La dérivée est alors $f'(x) = -4(x-1)(x+5)e^{-2x}$

3. Étudier les variations de f.

En utilisant la factorisation fournie, on pouvait construire le tableau suivant :

x	0		1		$+\infty$
-4		$-$		$-$	
$(x-1)$		$-$	0	$+$	
$(x+5)$		$+$		$+$	
e^{-2x}		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	0

4. Montrer que f admet un maximum dont on donnera la position et la valeur exacte.

f est strictement décroissante sur $[0;1[$ puis strictement croissante sur $]1;+\infty[$ et f est continue sur $\mathbb{R}$ donc f admet un maximum en $x = 1$ donc la valeur est $f(1) = 7e^{-2}$

5. Établir une équation de la tangente en 0.

Son équation a pour forme $y = f'(0) \times (x-0) + f(0)$ or $f'(0) = 20$ et $f(0) = -5$ donc $y = 20x - 5$

EXERCICE 3 Une étude est menée concernant le train d'atterrissage d'un certain type d'hélicoptère. Ce train d'atterrissage est composé d'une roue et d'un amortisseur oléopneumatique permettant d'absorber l'énergie de l'impact au moment de l'atterrissage.

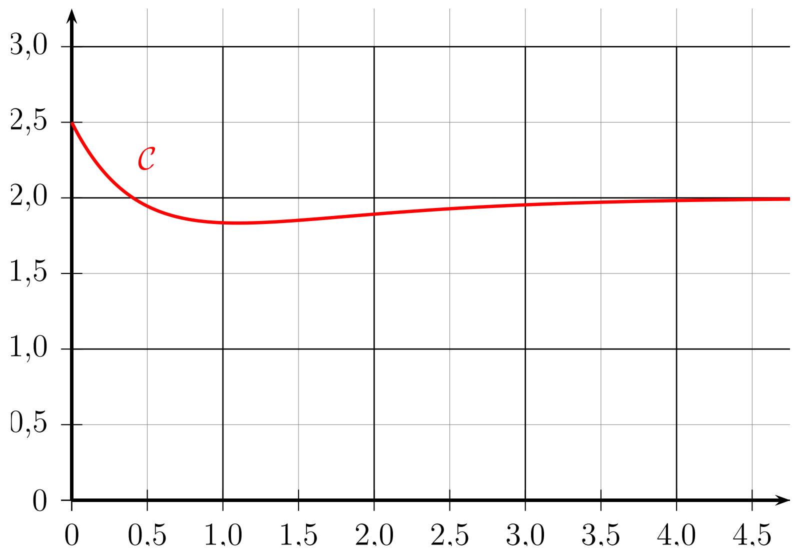
On note $f(t)$ la hauteur, en mètre, du centre de gravité de l'hélicoptère par rapport au sol à l'instant t exprimé en seconde.

On suppose que f est une fonction de la variable réelle t définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$.

On admet que la fonction f correspondant à la hauteur du centre de gravité de l'hélicoptère est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(t) = -\mathrm{e}^{-t} + 1{,}5\mathrm{e}^{-2t} + 2.$$

Sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.



1. Déterminer la hauteur du centre de gravité de l'hélicoptère au moment de l'atterrissage à l'instant $t = 0$.

   A $t = 0$, on lit $f(0) = 2{,}5$, le centre de gravité se situé à une hauteur de 2,5m à l'instant initial.

2. On admet que $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-t} = \lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-2t} = 0$.

   a) Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$.

   $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = -0 + 1{,}5 \times 0 + 2 = 2$

b) En donner une interprétation technique.

La position du centre de gravité se stabilise à 2m au bout d'un certain temps

3. a) À l'aide du graphique, conjecturer le sens de variation de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

La fonction semble décroissante sur $[0;1]$ puis croissante sur $[1;+\infty[$

b) Montrer que la dérivée peut s'écrire : $f'(t) = \mathrm{e}^{-2t}\left(\mathrm{e}^{t} - 3\right)$.

$f'(t) = -(-1)e^{-t} + 1{,}5 \times (-2) \times e^{-2t} + 0 = e^{-t} - 3e^{-2t} = e^{-2t} \times (e^{t} - 3)$

c) Résoudre sur $[0\ ;\ +\infty[$ l'inéquation $\mathrm{e}^{t} - 3 \geqslant 0$.

$\mathrm{e}^{t} - 3 \geqslant 0$ ssi $e^{t} = 3$ ssi $t = \ln(3)$ mais on pouvait ici juste obtenir une valeur approchée en lisant le graphe de la fonction exponentielle sur sa calculatrice. On obtenait $x \approx 1{,}10$

d) En déduire le signe de $f'(t)$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.

t	0		$ln(3)$		$+\infty$
$e^{t}-3$		$-$	0	$+$	
e^{-2t}		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

e) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

t	0		$ln(3)$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	0