Contrôle 2

Rappels : présentation soignée, exercices clairement séparés, résultats encadrés, tableaux à la règle et au crayon.

EXERCICE 1 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 5x + 2025$

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier les variations de f.
3. Montrer que f admet un minimum dont on donnera la position et la valeur exacte.

EXERCICE 2 On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = (2x^2 + 10x - 5)e^{-2x}$

1. Résoudre $f(x) = 0$ et interpréter graphiquement le résultat.
2. Montrer que $f'(x) = -4(x-1)(x+5)e^{-2x}$.
3. Étudier les variations de f.
4. Montrer que f admet un maximum dont on donnera la position et la valeur exacte.
5. Établir une équation de la tangente en 0.

EXERCICE 3 Une étude est menée concernant le train d'atterrissage d'un certain type d'hélicoptère. Ce train d'atterrissage est composé d'une roue et d'un amortisseur oléopneumatique permettant d'absorber l'énergie de l'impact au moment de l'atterrissage.

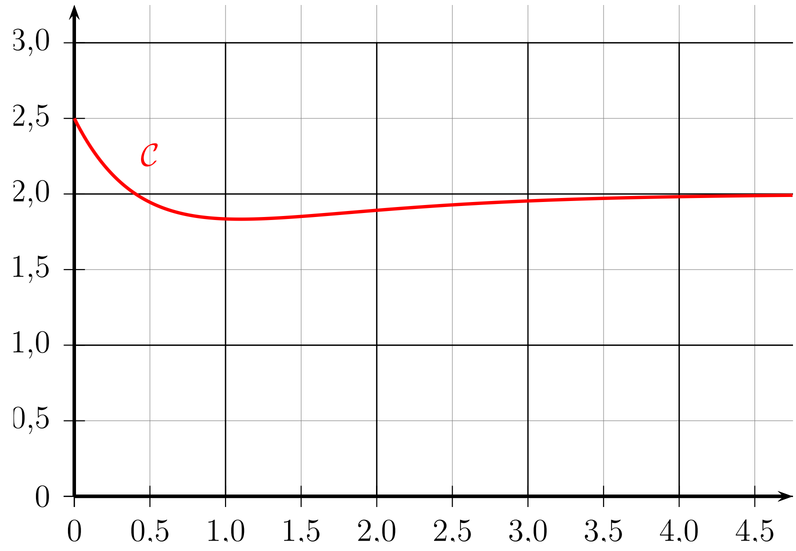
On note $f(t)$ la hauteur, en mètre, du centre de gravité de l'hélicoptère par rapport au sol à l'instant t exprimé en seconde.

On suppose que f est une fonction de la variable réelle t définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$.

On admet que la fonction f correspondant à la hauteur du centre de gravité de l'hélicoptère est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(t) = -\mathrm{e}^{-t} + 1{,}5\mathrm{e}^{-2t} + 2.$$

Sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.



1. Déterminer la hauteur du centre de gravité de l'hélicoptère au moment de l'atterrissage à l'instant $t = 0$.

2. On admet que $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-t} = \lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-2t} = 0$.

   a) Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$.

   b) En donner une interprétation technique.

3. a) À l'aide du graphique, conjecturer le sens de variation de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

   b) Montrer que la dérivée peut s'écrire : $f'(t) = \mathrm{e}^{-2t}\left(\mathrm{e}^{t} - 3\right)$.

   c) Résoudre sur $[0\ ;\ +\infty[$ l'inéquation $\mathrm{e}^{t} - 3 \geqslant 0$.

   d) En déduire le signe de $f'(t)$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.

   e) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0\ ;\ +\infty[$.