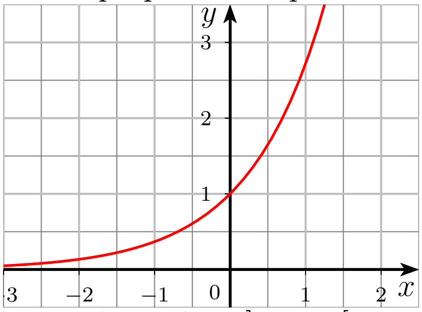
1 Définition

1.1 Retour sur l'exponentielle.

On a déjà obtenu les informations suivantes à propos de l'exponentielle :

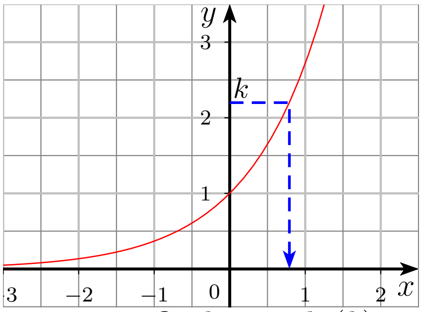
x	$-\infty$ $\quad\quad\quad$ $+\infty$
$exp(x)$	$0 \nearrow +\infty$



Le fonction exp est définie sur $\mathbb{R}$, prend ses valeurs dans $]0;+\infty[$.

1.2 Le logarithme népérien.

D'après le tableau de variation précédent, pour tout $k \in]0;+\infty[$, il n'existe qu'une seule valeur x telle que $exp(x) = k$. Ce nombre est appelé logarithme népérien de k.



On le note $\ln(k)$.

Par définition on a donc : pour tout réel $x \in]0;+\infty[$, $exp(\ln(k)) = k$ aussi noté $\boxed{e^{\ln(k)} = k}$

1.3 Fonction logarithme népérien.

Puisque à chaque réel k de $]0;+\infty[$, on peut associer un unique nombre réel x tel que $exp(x) = k$ noté $\ln(k)$, cela définit alors une fonction de $]0;+\infty[$ vers $\mathbb{R}$ qui a chaque k associe le nombre $\ln(k)$, c'est la fonction logarithme népérien.

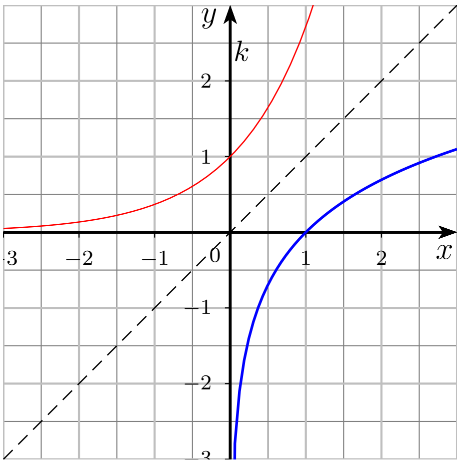
On note $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln(x) \end{array}$

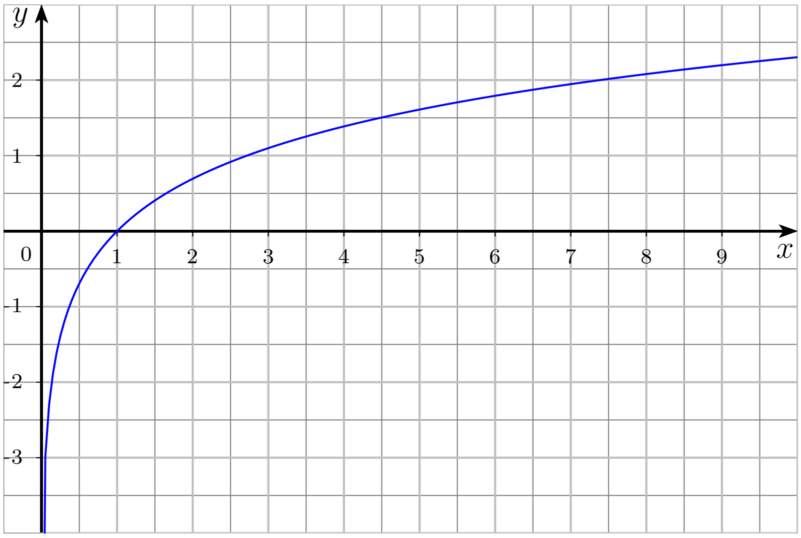
La courbe représentative de cette fonction est l'ensemble des points M de coordonnées (x,y) où $y = \ln(x)$ avec $x \in]0;+\infty[$ or ici $e^y = x$

donc la courbe de ln correspond aux points de coordonnées (e^y,y) où $y \in \mathbb{R}$

On peut alors déduire la courbe de ln à partir de la courbe de exp en échangeant les rôles des abscisses et des ordonnées. Cela correspond à en effectuer la symétrie par rapport à la bissectrice du repère (la droite d'équation $y = x$)

On a aussi : $\boxed{\text{pour tout } x \in]0;+\infty[, \text{ pour tout } y \in \mathbb{R} \quad y = \ln(x) \quad \text{équivaut à} \quad e^y = x}$





la courbe représentative de ln

2 Propriétés algébriques

• Puisque $e^0 = 1$, on a : $\boxed{\ln(1) = 0}$ puisque $e^1 = e$ on a $\boxed{\ln(e) = 1}$

• Soient a et b deux réels strictement positifs,

$a \times b = e^{\ln a} \times e^{\ln b}$ car pour tout $x \in]0; +\infty[$, on a : $x = e^{\ln x}$

$a \times b = e^{\ln a + \ln b}$ car pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on démontré que $e^x \times e^y = e^{x+y}$

$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$ en appliquant ln de chaque côté du signe =

et sachant que $\ln(e^x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

On retient $\boxed{\text{pour tous } a \text{ et } b \text{ dans }]0; +\infty[\text{, on a : } \ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)}$

• Avec $b = \frac{1}{a}$, l'encadré devient : pour tous a dans $]0; +\infty[$, on a :

$\ln(a \times \frac{1}{a}) = \ln(a) + \ln(\frac{1}{a})$ or $a \times \frac{1}{a} = 1$ et $\ln(1) = 0$

donc $0 = \ln(a) + \ln(\frac{1}{a})$

donc $\boxed{\text{pour tout } a \text{ dans }]0; +\infty[\text{, on a : } \ln(\frac{1}{a}) = -\ln(a)}$

• pour tous a et b dans $]0; +\infty[$, on a : $\ln(a \times \frac{1}{b}) = \ln(a) + \ln(\frac{1}{b})$

donc $\boxed{\text{pour tous } a \text{ et } b \text{ dans }]0; +\infty[\text{, on a : } \ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)}$

• pour tous a dans $]0; +\infty[$, on a : $\ln(a \times a) = \ln(a) + \ln(a) = 2\ln(a)$

et plus généralement, on peut montrer que :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et pour tout } a \in]0; +\infty[\text{, on a : } \ln(a^n) = n\ln(a)}$$

3 Étude de la fonction $\ln$

3.1 Ensembles

La fonction ln est définie sur $]0;+\infty[$ (qui est aussi noté $\mathbb{R}_*^+$), on admet qu'elle est aussi continue et dérivable sur cet intervalle.

3.2 Dérivée et variation

On sait que par construction pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $(e^x)' = e^x$

donc par composition pour toute fonction u dérivable on a : $\left(e^{u(x)}\right)' = e^{u(x)} \times u'(x)$

avec $u = \ln$ et sachant que pour tout $x > 0$, on a $x = e^{\ln(x)}$, en dérivant on obtient : $1 = e^{\ln(x)} \times \ln'(x)$

donc $1 = x \times \ln'(x)$ donc $\boxed{\text{pour tout } x > 0, \text{ on a : } \ln'(x) = \dfrac{1}{x}}$

Plus généralement on retient que :

pour toute fonction dérivable u à valeurs dans $]0;+\infty[$, on a : $\boxed{\left(\ln(u)\right)' = \dfrac{u'}{u}}$

Puisque pour tout $x > 0$, on a : $\ln'(x) = \dfrac{1}{x} > 0$, la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

3.3 Limites

Pour tout $M > 0$, il existe $x_0 = e^M$ tel que pour tout $x > x_0$, $x > e^M > 0$ or ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ donc $ln(x) > ln(e^M)$ c'est à dire $\ln(x) > M$

Ce qui signifie que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty}$

En posant alors $u = \frac{1}{x}$ l'égalité précédente devient : $\lim\limits_{\frac{1}{u}\to+\infty} \ln(\frac{1}{u}) = +\infty$ c'est à dire $\lim\limits_{u\to 0} -\ln(\frac{1}{u}) = +\infty$

donc $\boxed{\lim\limits_{u\to 0} \ln(\frac{1}{u}) = -\infty}$

Le tableau de variation est alors le suivant :

x	0	1	e	$+\infty$
$\frac{1}{x}$		$+$		
$\ln(x)$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

3.4 Croissances comparées

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par $f(x) = \ln(x) - \sqrt{x}$, on a : $f'(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2-\sqrt{x}}{x}$

Pour $x > 4$, on a : $\sqrt{x} > 2$ donc $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]4;+\infty[$

Par ailleurs $f(4) = \ln(4) - 2$ or $4 < e^2$ donc $\ln(4) < 2$ donc $f(4) < 0$

Donc pour tout $x > 4$, on a $f(x) < 0$ c'est à dire $\ln(x) < \sqrt{x}$ donc $0 < \dfrac{\ln(x)}{x} < \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$ donc par comparaison $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0}$

A fortiori $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n} = 0}$

En posant $u = \frac{1}{x}$ l'encadré précédent devient : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\lim\limits_{\frac{1}{u}\to+\infty} \ln(\dfrac{1}{u}) \times u^n = 0$ c'est à dire $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \text{ on a : } \lim\limits_{u\to 0} u^n \ln(u) = 0}$

4 Logarithme décimal

4.1 Définition

On appelle logarithme décimal la fonction notée log définie sur $]0;+\infty[$ par $\log(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$

4.2 Propriétés

Les propriétés de log sont les mêmes que celles de ln et on démontre sans difficulté les résultats suivants :

$\log(1) = 0$, $\log(10) = 1$, et, plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a : $\log(10^n) = n$

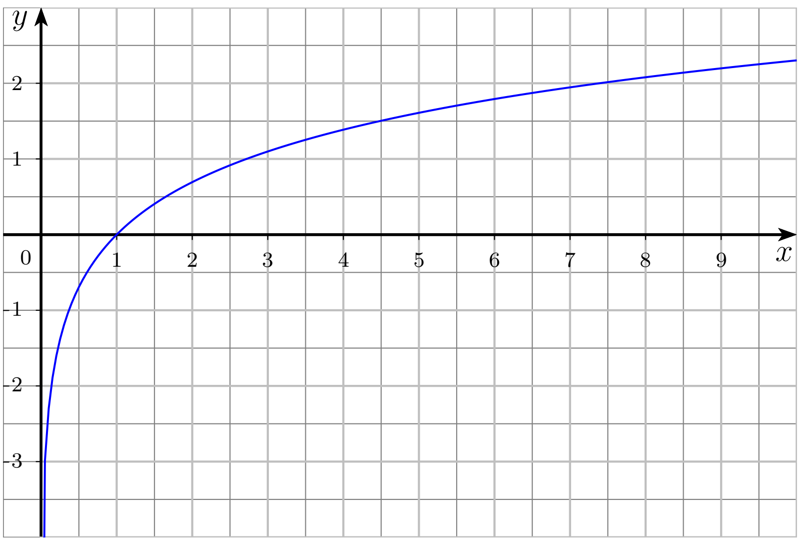
Pour tous $A > 0$ et $B > 0$ on a :

$\log(A \times B) = \log(A) + \log(B)$ $\quad \log \dfrac{1}{A} = -\log(A)$ $\quad \log \dfrac{A}{B} = \log(A) - \log(B)$

Pour tout $u > 0$, on a : $\log(\sqrt{u}) = \dfrac{1}{2}\log(u)$

Propriété	**Formule / Exemple**	**Conditions**
Définition	$\ln(x) = y \iff e^y = x$	$x > 0$
Valeurs particulières	$\ln(1) = 0,\ \ln(e) = 1$	–
Produit	$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$	$a > 0, b > 0$
Quotient	$\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$	$a > 0, b > 0$
Puissance	$\ln(a^n) = n\ln(a)$	$a > 0, n \in \mathbb{R}$
Dérivée	$(\ln(x))' = 1/x$	$x > 0$
Croissance	Strictement croissante	$x > 0$
Limites	$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$	–
Changement de base	$\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$	$b > 0, b \neq 1, x > 0$

Propriétés essentielles du logarithme naturel



la courbe représentative de ln