Série d'exercices No 2

EXERCICE 1 Additions, soustractions, multiples.

Calculer $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ et $2z_1 - 3z_2$ dans chacun des cas suivants :

a) $z_1 = 1 + 2i$ et $z_2 = 3 - 4i$

b) $z_1 = \dfrac{1}{2} - 2i$ et $z_2 = 3 + \dfrac{i}{4}$

EXERCICE 2 Multiplication, puissances.

Calculer $z_1 \times z_2$, z_1^2 et z_2^3 dans chacun des cas suivants :

a) $z_1 = 1 + 2i$ et $z_2 = 3 - 4i$

b) $z_1 = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ et $z_2 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$

EXERCICE 3 Inverses, quotients.

Calculer $\dfrac{1}{z_1}$, $\dfrac{1}{z_2}$ et $\dfrac{z_1}{z_2}$ dans chacun des cas suivants :

a) $z_1 = 1 + 2i$ et $z_2 = 3 - 4i$

b) $z_1 = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ et $z_2 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$

EXERCICE 4 Calculer les complexes et les écrire sous la forme $a + ib$

$z_1 = (1 + 3i) + (4 - 5i)$

$z_2 = (2 - 5i) + (12 + 4i)$

$z_3 = (7 + 5i) - (6 - i)$

$z_4 = (1 + 3i) \times (4 - 5i)$

$z_5 = (2 - 5i) \times (2 + 4i)$

$z_6 = (1 + i)^2$

$z_7 = (7 + 5i)^2$

$z_8 = i^3$

$z_9 = (1 + i)(6 - i)^2$

$z_{10} = i^{2017}$

EXERCICE 5 Représenter les complexes suivants :

$z_1 = 1 + i$

$z_2 = 1 - i$

$z_3 = 2 + 3i$

$z_4 = -2 + 3i$

$z_5 = i$

$z_6 = -2i$

$z_7 = \dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}$

$z_8 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

$z_9 = \dfrac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$

$z_{10} = (1+i)\times(2+i)$

EXERCICE 6 Opérations.
Écrire les nombres suivants sous la forme $A + iB$ où A et B sont des réels.

$z_1 = (2+3i)^2$
$z_2 = (2-3i)^2$
$z_3 = (3+2i)(1-i)$
$z_4 = \dfrac{1}{2+i}$
$z_5 = \dfrac{1}{5-2i}$
$z_6 = \dfrac{3}{1+i}$
$z_7 = \dfrac{3-2i}{1+i}$

$z_8 = \dfrac{i}{5+6i}$
$z_9 = \dfrac{\frac{1}{2}+3i}{+\frac{1}{3}i}$
$z_{10} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{R}+jC\omega}$ lorsque R et C sont des réels strictement positifs et j est le i vu en mathématiques.

EXERCICE 7 Ecrire sous forme algébrique

$z_1 = \dfrac{1+2i}{3-4i}$

$z_2 = (1+2i)^3$

$z_3 = \dfrac{(1+i)^3}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}}$

EXERCICE 8 Donnez la forme algébrique des nombres complexes suivants :
$z_1 = (3+i)(4-2i) \quad , \quad z_2 = (3-i)^2 \quad , \quad z_3 = (2+i\sqrt{3})(2-i\sqrt{3})$

EXERCICE 9 Donnez la forme algébrique des nombres complexes suivants :
$z_1 = \dfrac{2}{1+i} \quad , \quad z_2 = \dfrac{1}{3-i\sqrt{2}} \quad , \quad z_3 = \dfrac{1}{i\sqrt{2}-3}$

EXERCICE 10 Donnez la forme algébrique des nombres complexes suivants :
$z_1 = \dfrac{2-5i}{3+2i} \quad , \quad z_2 = \dfrac{6+3i}{1-2i} \quad , \quad z_3 = \dfrac{3i}{3+4i}$

EXERCICE 11 Donnez la forme algébrique des nombres complexes suivants :
$z_1 = \dfrac{2}{1-2i} + \dfrac{3}{2+i} \quad , \quad z_2 = 2i - \dfrac{3}{2-i}$

EXERCICE 12 Pour tout nombre complexe z, on pose $f(z) = z^2 - z$ avec $z = x+iy$, où x, y sont des réels.
Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$.

EXERCICE 13 Donner la forme algébrique du conjugué $\overline{z}$ du complexe z dans chacun des cas suivants :

$z_1 = 2+5i$, $z_2 = \dfrac{1}{i+2}$, $z_3 = \dfrac{2-i}{2i+1}$, $z_4 = (3-2i)(i+1)$, $z_5 = \frac{i(3-2i)}{2i+1}$

EXERCICE 14 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes d'inconnue z et donner les solutions sous forme algébrique.

a) $iz = 3+i$

b) $(2-i)z - 2i = iz + 2 - 3i$

c) $(2iz+i)(4z-8-4i) = 0$

d) $\dfrac{z-2i}{z+2} = 4i$

e) $4z + 2i - 4 = 0$

f) $(iz - 2 + i)(2iz + i - 2) = 0$

g) $2z + i \times \overline{z} = 4$

h) $2iz - \overline{z} = 4i$

EXERCICE 15 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants :

$$\begin{cases} 3z + z' &= 2 - 5i \\ z - z' &= -2 + i \end{cases} \qquad \begin{cases} 3z + z' &= 5 + 2i \\ -z + z' &= 1 - 2i \end{cases}$$

EXERCICE 16 On considère le complexe $z = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

1. Calculer z^2 puis z^3

2. En déduire z^4 puis z^{12} puis z^{2019}

3. Calculer $1 + z + z^2$ puis $1 + z + z^2 + \cdots + z^{11}$

EXERCICE 17 On considère le polynôme P défini par $P(z) = z^4 - 1$

1. Montrer que $P(z) = (z+1)(z-1)(z^2+1)$

2. En déduire les solutions de $P(z) = 0$

EXERCICE 18 Montrer que $\forall z \in \mathbb{C}$ tel que $z \notin \mathbb{R}_-$, on a : $\left(\dfrac{z+|z|}{\sqrt{Re(z)+|z|}}\right)^2 = 2z$

EXERCICE 19 Déterminer l'ensemble de points M d'affixes z tels que :

a) $\text{Re}(z) = 3$

b) $\text{Im}(z) = 2$

c) $|z| = 5$

d) $|z-3| = 1$

e) $|z+2| = \frac{1}{2}$

f) $|2z + 3i| = 1$

g) $|z-4| = |z+4i|$

EXERCICE 20 On considère un système électronique régi par la fonction de transfert $T(\omega) = \dfrac{R}{R + jL\omega}$ où R, L, ω sont des réels strictement positifs et j^2

1. Montrer que $T(\omega) = \dfrac{1}{1 + j\frac{L}{R}\omega}$

2. Ecrire sous forme algébrique la valeur de $T(\omega_0)$ où $\omega_0 = \dfrac{R}{L}$

3. On appelle gain du système la fonction G définie par $G(\omega) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$

- **a.** Calculer $G(\omega_0)$
- **b.** Que devient G lorsque ω tend vers 0_+ ?
- **c.** Que devient G lorsque ω tend vers $+\infty$?