Lycée Schuman Perret
Décembre 2024

Série d'exercices No 5

CIRA[1]

EXERCICE 1

1. On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = z^3 + (2 - 2\mathrm{i})z^2 + (4 - 4\mathrm{i})z - 8\mathrm{i}.$$

a. Démontrer que $2\mathrm{i}$ est une solution de l'équation $P(z) = 0$.

b. Démontrer que $P(z) = (z - 2\mathrm{i})\left(z^2 + 2z + 4\right)$.

c. En déduire toutes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

2. *Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé* $(O\vec{u}\ \vec{v})$.
On réalisera une figure sur l'annexe donnée en dernière page du sujet.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $z_{\mathrm{A}} = 1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_{\mathrm{B}} = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$, et $z_{\mathrm{C}} = -2$.

a. Déterminer le module et un argument de chacun des trois nombres complexes z_{A}, z_{B} et z_{C} puis les écrire en notation exponentielle.

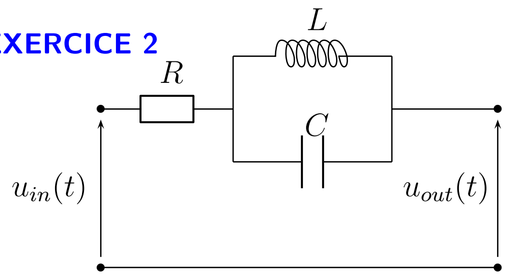
b. Placer les points A, B et C dans $(O\vec{u}\ \vec{v})$
On note $Z = \dfrac{z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{C}}}{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{C}}}$.

c. Déterminer la forme algébrique de Z.

d. Calculer le module et un argument de Z.

e. En déduire la nature du triangle ABC.

EXERCICE 2



u_{in} la tension d'entrée, en volts (V) ;
u_{oui} la tension de sortie, en volts (V) ;
C la capacité électrique du condensateur, en farads (F) ;
L l'inductance de la bobine, en henrys (H) ;
R la résistance totale du circuit, en ohms (Ω) ;
t le temps en secondes (s)

1. Montrer que l'impédance complexe équivalente est $Z_{eq} = R + j\dfrac{L\omega}{1 - LC\omega^2}$ où ω est la pulsation de u_{in}

2. Comment se comporte ce circuit lorsque ω tend vers 0 ?

3. Que devient la partie imaginaire de Z_{eq} lorsque ω tend vers $+\infty$? Comment se comporte alors le circuit ?

4. Quelle est la limite de $|Z_{eq}|$ lorsque ω tend vers $\frac{1}{\sqrt{LC}}$? Comment se comporte alors le circuit ?

EXERCICE 3

On désigne par j le nombre complexe de module 1 dont un argument est $\dfrac{\pi}{2}$.
On considère un filtre dont la fonction de transfert T est définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$T(\omega) = \frac{-\mathrm{j}\omega k}{1 - \mathrm{j}\dfrac{\omega}{2}}.$$

Le nombre k est un nombre réel strictement positif compris entre 0 et 1.
En associant trois filtres identiques au précédent, on obtient un système dont la fonction de transfert H est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$H(\omega) = (T(\omega))^3\,.$$

1. On note $r(\omega)$ le module de $H(\omega)$.
On a donc : $r(\omega) = |H(\omega)|$.

a. Montrer que le module de $T(\omega)$ est $\dfrac{k\omega}{\sqrt{1 + \dfrac{\omega^2}{4}}}$.

b. En déduire $r(\omega)$.

2. **a.** Justifier qu'un argument de $(-\mathrm{j}\omega)^3$ est $\dfrac{\pi}{2}$.
Justifier qu'un argument de $1 - \mathrm{j}\dfrac{\omega}{2}$ est $-\arctan\left(\dfrac{\omega}{2}\right)$.
En déduire qu'un argument de $H(\omega)$, notée $\varphi(\omega)$, est défini sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} + 3\arctan\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

b. On note φ' la dérivée de la fonction φ. Calculer $\varphi'(\omega)$.
Déterminer le signe de φ' sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

c. Déterminer les limites de la fonction φ en 0 et $+\infty$.

EXERCICE 4

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E) d'inconnue z : $z^2 - 8z + 64 = 0$.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 4 + 4\mathrm{i}\sqrt{3}$, $b = 4 - 4\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $c = 8\mathrm{i}$.

a. Calculer le module et un argument du nombre a.

b. Donner la forme exponentielle des nombres a et b.

c. Montrer que les points A, B et C sont sur un même cercle ce de centre O dont on déterminera le rayon.

d. Placer les points A, B et C dans le repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

3. On considère les points A$'$, B$'$ et C$'$ d'affixes respectives $a' = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$, $b' = b\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et $c' = c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

a. Montrer que $b' = 8$.

b. Calculer le module et un argument du nombre a'.

Pour la suite on admet que $a' = -4 + 4\mathrm{i}\sqrt{3}$ et $c' = -4\sqrt{3} + 4\mathrm{i}$.

4. On admet que si M et N sont deux points du plan d'affixes respectives m et n alors le milieu I du segment $[MN]$ a pour affixe $\dfrac{m+n}{2}$ et la longueur MN est égale à $|n - m|$.

a. On note r, s et t les affixes des milieux respectifs R, S et T des segments [A$'$B], [B$'$C] et [C$'$A].
Calculer r et s. On admet que $t = 2 - 2\sqrt{3} + \mathrm{i}\left(2 + 2\sqrt{3}\right)$.

b. Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature du triangle RST ? Justifier ce résultat.