EXERCICE
équation différentielle et étude complète

Pour fabriquer de l'aluminium en feuille on chauffe une plaque d'aluminium à 250°C puis on la sort du four : c'est alors la phase de refroidissement. On étudie l'évolution de la température de la plaque d'aluminium durant cette phase.
On note $f(t)$ la température de la plaque d'aluminium à l'instant t.
$f(t)$ est exprimée en degré Celsius, et t désigne le nombre de minutes de refroidissement.

Les deux parties peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A. Équation différentielle

On sait que la fonction f est solution de l'équation différentielle : (E) : $\quad y' + 0{,}25y = 7{,}5$, où y est une fonction inconnue de la variable réelle t, définie et dérivable sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$, et où y' est la dérivée de y.

1. Résoudre l'équation différentielle : (E_0) : $\quad y' + 0{,}25y = 0$.

On fournit la formule suivante :

Équation différentielle	Solutions sur un intervalle I
$y' + ay = 0$	$y(t) = k\mathrm{e}^{-at}, \quad k \in \mathbb{R}$

2. Soit c un nombre réel.

On considère la fonction constante g définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par : $g(t) = c$. Déterminer le réel c pour que la fonction g soit solution de l'équation différentielle (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer l'expression de la fonction f sachant qu'à l'instant $t = 0$ la température est égale à 250 °C.

Partie B. Étude de fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par : $f(t) = 220\mathrm{e}^{-0{,}25t} + 30$.
On admet que $f(t)$ représente la température (en degré Celsius) de la plaque d'aluminium après t minutes de refroidissement.

1. Déterminer la valeur approchée à 0,1 °C de la température de la plaque après un quart d'heure de refroidissement.

2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

Quelle est la conséquence pour la courbe représentative de la fonction f ?

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

3. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

Déterminer $f'(t)$ pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

4. Un technicien affirme : « en cent secondes, la plaque a perdu cent degrés ».

A-t-il raison ? Quelle est la durée nécessaire, arrondie à la seconde, pour que la température de la plaque passe en dessous de 150 °C ?

Les réponses devront être justifiées.

5. Réaliser sur la copie un croquis donnant l'allure de la courbe représentative de la fonction f. Ce croquis devra également faire apparaître les résultats des questions **1** à **4**.