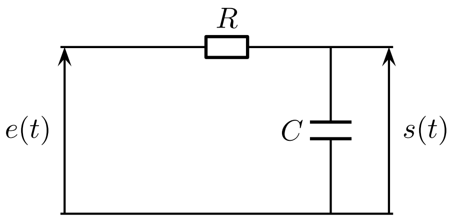
EXERCICE 1 Un système est modélisé par un circuit composé d'une résistance et d'un condensateur en série. On note R la valeur de la résistance, en ohm, et C la capacité du condensateur, en farad.

$e(t)$ est la tension aux bornes du circuit, exprimée en volt, à l'instant t (en seconde).
$s(t)$ est la tension aux bornes du condensateur, exprimée en volt, à l'instant t (en seconde).



À l'instant $t = 0$ le condensateur est déchargé et on a : $s(0) = 0$.
L'application des lois de la physique conduit, pour tout $t \geqslant 0$, à la relation : $RCs'(t) + s(t) = e(t)$ qui s'écrit encore : $\tau s'(t) + s(t) = e(t)$, avec $\tau = RC$.

Dans tout l'exercice, on suppose que : $\tau = 2$ secondes.

Dans cette partie le circuit est alimenté par une tension constante : $e(t) = e_0 = 6$ V.
On considère l'équation différentielle (E) : $2x'(t) + x(t) = 6$, où l'inconnue x est une fonction dérivable de la variable t, où t est un réel positif.

1. Déterminer une solution particulière constante x_0 de l'équation différentielle (E).
2. Résoudre I'équation différentielle sans second membre (E_0) : $2x'(t) + x(t) = 0$.
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).
4. Justifier que la fonction s vérifie, pour tout $t \geqslant 0$: $s(t) = 6\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\right)$.
5. Pour ce circuit on considère que la tension finale aux bornes du condensateur est de 6 V.
   a. Que représente cette valeur 6 pour la fonction s ? On n'attend pas de justification.
   b. Quel pourcentage de la tension finale a-t-on aux bornes du condensateur lorsque $t = 2$?
   Arrondir ce pourcentage à l'unité.
6. On considère que le condensateur est chargé lorsque la tension à ses bornes atteint 95 % de la tension finale. On dit alors que le condensateur est passé en régime permanent.
   a. Estimer graphiquement au bout de combien de temps le condensateur est chargé. Faire apparaître sur le graphique fourni en annexe les traits nécessaires à la lecture graphique.
   b. Déterminer par la méthode de votre choix, que vous préciserez, une valeur approchée au centième de la durée nécessaire pour atteindre le régime permanent.

EXERCICE 2

Une entreprise d'injection plastique est chargée de réaliser par moulage des hélices de mini-drones dans un nouveau matériau plastique.
La fabrication s'effectue en deux temps :

Phase 1 : injection sous pression de la matière fondue à une température initiale de 240°C et maintien sous pression de la matière pendant les 3 premières secondes du refroidissement.

Phase 2 : poursuite du refroidissement et éjection de l'hélice.

À l'issue de ces deux étapes le moule est refermé et une nouvelle hélice est introduite.

Pour être utilisable, on estime que le matériau plastique ne doit pas avoir perdu plus de 20 % de sa température initiale lors des 3 premières secondes du refroidissement.

Lors de la fabrication, afin de maîtriser le refroidissement de l'hélice, on étudie la température T à laquelle le moule doit être maintenu. En effet, pour garantir un remplissage homogène du moule, le matériau plastique ne doit pas refroidir trop vite lors de son injection dans le moule.

Partie 1

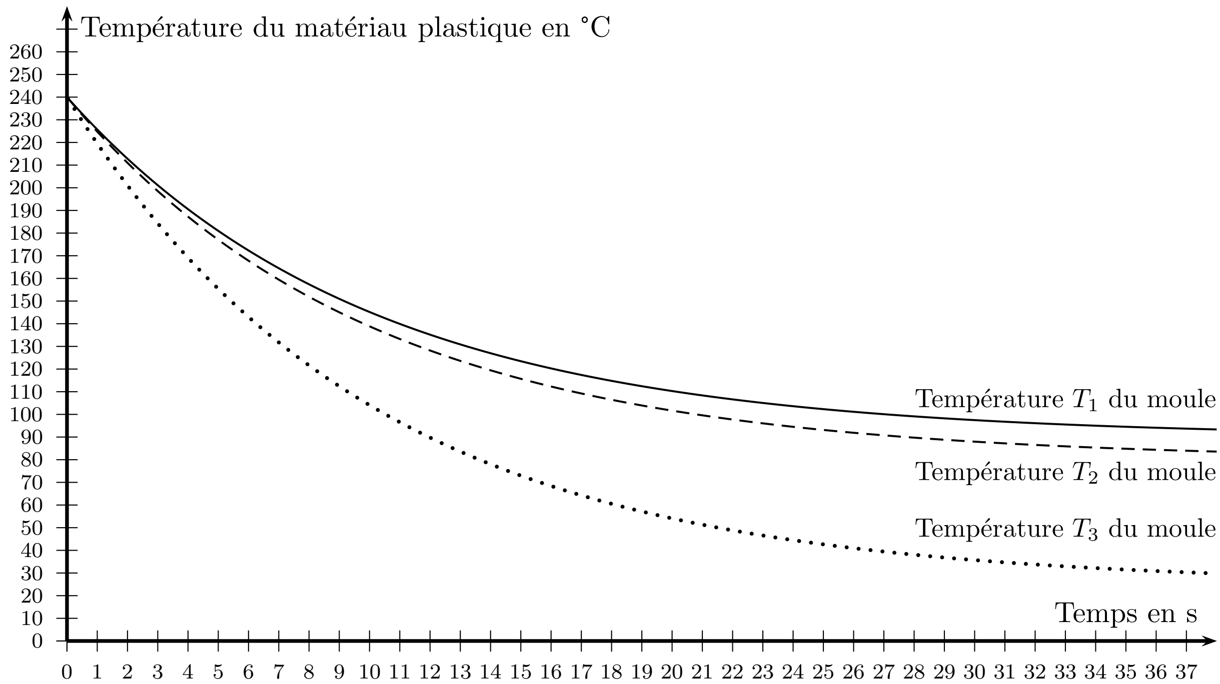
Des séries de mesures ont permis de réaliser trois courbes de refroidissement. Elles représentent l'évolution de la température du matériau plastique (exprimée en degrés Celsius) en fonction du temps (exprimé en secondes), pour trois valeurs différentes de la température du moule, T_1, T_2 et T_3.

1. Les trois températures satisfont-elles aux conditions souhaitées de fabrication d'une hélice ?

   Détailler la réponse.

2. On estime de plus que le matériau a suffisamment durci et que l'hélice peut être éjectée sans risque de déformation lorsque sa température atteint les 100 degrés.

   Parmi les températures qui satisfont aux conditions de fabrication, quelle est la température du moule qui permet de fabriquer le plus d'hélices dans un temps donné ? Expliquer.



Partie 2

On décide de maintenir le moule à une température de 80°C. On s'intéresse à la fonction donnant la température du matériau plastique (exprimée en degrés) en fonction du temps (exprimé en secondes).
On admet que cette fonction est solution de l'équation différentielle (E) :

$$(E) : \quad y' + 0{,}1y = 8$$

Dans cette équation, y désigne une fonction de la variable réelle t, définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$.

1. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle
$$(E_0)\ :\ y' + 0{,}1y = 0.$$

2. Déterminer le réel a tel que la fonction g, définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(t) = a$ soit une solution particulière de l'équation (E).

3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E).

4. Déterminer la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$, solution de l'équation différentielle (E) satisfaisant aux conditions de température du problème.