

EXERCICE 1 Un jouet pour enfant prévu pour être utilisé en extérieur, est un bonhomme de neige monté sur un ressort. Le principe de fonctionnement est le suivant : on comprime le jouet au sol et une fois relâché, celui-ci est propulsé dans les airs à une certaine hauteur et retombe ensuite au sol. On suppose que le mouvement du jouet est vertical.

On souhaite étudier la hauteur atteinte par le jouet en fonction du nombre d'années d'utilisation.

On modélise la hauteur que peut atteindre le jouet par une solution de l'équation différentielle (E) :

$$y'' + 2y' + y = 3;$$

y est une fonction de la variable réelle x , définie et deux fois dérivable sur $[0 ; +\infty[$;

x représente la durée d'utilisation, exprimée en années ;

y' désigne la fonction dérivée de y et y'' désigne la fonction dérivée seconde de y .

Partie A : Résolution de l'équation différentielle

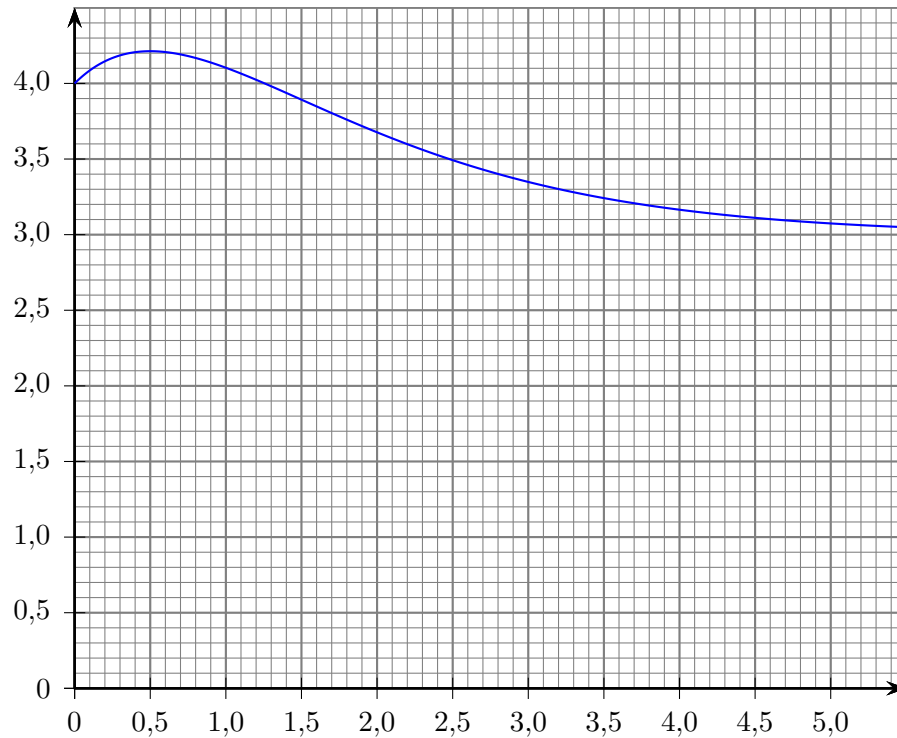
1. Résoudre dans \mathbb{R} , l'équation différentielle (E_0) : $y'' + 2y' + y = 0$.
2. Soit un nombre réel k , on définit sur \mathbb{R} la fonction constante g telle que $g(x) = k$.
Déterminer la valeur de k pour que la fonction g soit une solution de l'équation différentielle (E).
3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).
4. Déterminer la fonction f , solution de l'équation différentielle (E) vérifiant les conditions suivantes :
 $f(0) = 4$ et $f(2) = 5e^{-2} + 3$.

Partie B : Étude de la fonction f

La hauteur exprimée en décimètres que peut atteindre le jouet après x années d'utilisation est donnée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = (2x + 1)e^{-x} + 3$.

On note \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité graphique 2 cm donnée en **Annexe**.

1. Quelle hauteur en décimètres peut atteindre le jouet lors de la toute première utilisation, c'est-à-dire pour $x = 0$?
2. Quelle hauteur en décimètres peut atteindre le jouet après 6 mois d'utilisation ?
Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-2} .
3. On admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0$ et que $f(x) = 2x e^{-x} + e^{-x} + 3$.
 - a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
 - b. En déduire que la courbe \mathcal{C} admet une asymptote \mathcal{D} , dont on donnera une équation puis tracer cette droite \mathcal{D} sur le document fourni en **Annexe (à rendre avec la copie)**.
 - c. Interpréter cette limite dans le contexte de la situation étudiée.
4. On note f' la fonction dérivée de la fonction f .
 - a. Justifier que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0 ; +\infty[$, $f'(x) = (1 - 2x)e^{-x}$.
 - b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et en déduire le tableau de variations de la fonction f .
5. On admet que la fonction F définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par : $F(x) = (-2x - 3)e^{-x} + 3x$ est une primitive de la fonction f .
Calculer l'aire \mathcal{A} en cm^2 , de la partie du plan limitée par la courbe \mathcal{C} , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2$.
Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-2} .



EXERCICE 2



Lorsqu'un tiroir se referme, le fond du tiroir, marqué par le point M, se rapproche du fond du meuble, marqué par le point O (voir croquis ci-dessus).

On note $f(t)$, la distance entre le point O et le point M, à l'instant t .

$f(t)$ est exprimée en centimètres et t est exprimée en seconde.

L'instant $t = 0$ correspond au moment où l'utilisateur pousse le tiroir pour le fermer.

Les deux parties peuvent être traitées de façon indépendante

Partie A. Résolution d'une équation différentielle

On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle :

$$(E_0) : y'' + 5y' + 4y = 0,$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle t , définie et deux fois dérivable sur $[0 ; +\infty[$, et où y' est la dérivée de y , et y'' la dérivée seconde de y .

1. a. Résoudre l'équation : $r^2 + 5r + 4 = 0$.
b. Résoudre l'équation différentielle (E_0) .
2. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, la situation est la suivante :
 - le point M est situé à 20 cm du point O.
 - le point M se déplace vers le point O avec une vitesse négative égale à $-10 \text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$.
 - a. En déduire la valeur de $f(0)$ et celle de $f'(0)$.

b. On admet que :

$$f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}.$$

Déterminer la valeur exacte de la distance OM, deux secondes après le début de la fermeture.

Le tiroir est dit *fermé* lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm.

Le constructeur affirme que le tiroir est *fermé* en moins de 4 secondes.

A-t-il raison ? Justifier.

EXERCICE 3 Une étude est menée concernant le train d'atterrissage d'un certain type d'hélicoptère. Ce train d'atterrissage est composé d'une roue et d'un amortisseur oléopneumatique permettant d'absorber l'énergie de l'impact au moment de l'atterrissage.

On note $f(t)$ la hauteur, en mètre, du centre de gravité de l'hélicoptère par rapport au sol à l'instant t exprimé en seconde.

On suppose que f est une fonction de la variable réelle t définie et deux fois dérivable sur $[0 ; +\infty[$.

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

A. Résolution d'une équation différentielle

Une étude mécanique montre que la fonction f est solution de l'équation différentielle

$$(E) : y'' + 3y' + 2y = 4,$$

où y est une fonction inconnue de la variable réelle t , définie et deux fois dérivable sur $[0 ; +\infty[$, y' la fonction dérivée de y et y'' sa fonction dérivée seconde.

1. a. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $r^2 + 3r + 2 = 0$,
b. En déduire les solutions de l'équation différentielle

$$(E_0) : y'' + 3y' + 2y = 0.$$

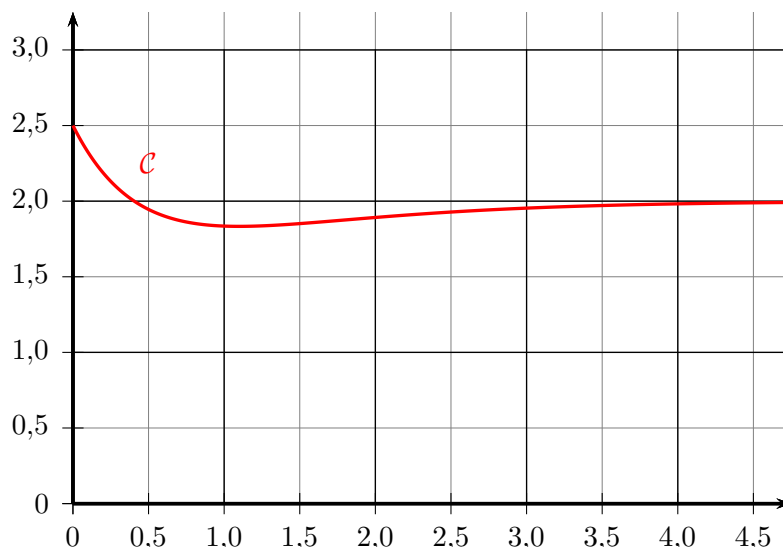
2. Soit k un nombre réel. On définit la fonction constante g sur $[0 ; +\infty[$ par $g(t) = k$.
Déterminer k pour que la fonction g soit solution de l'équation différentielle (E) .
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) .

B. Étude de la fonction f

On admet que la fonction f correspondant à la hauteur du centre de gravité de l'hélicoptère est définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$f(t) = -e^{-t} + 1,5e^{-2t} + 2.$$

Sa courbe représentative \mathcal{C} dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.



1. Déterminer la hauteur du centre de gravité de l'hélicoptère au moment de l'atterrissage à l'instant $t = 0$.
2. On admet que $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-2t} = 0$.
 - a. Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$.
 - b. En déduire que la courbe \mathcal{C} admet une droite asymptote dont on donnera une équation.
3.
 - a. À l'aide du graphique, conjecturer le sens de variation de la fonction f sur $[0 ; +\infty]$.
 - b. Un logiciel de calcul formel donne ci-dessous une expression de la dérivée f' de la fonction f . Ce résultat est admis.

$$\begin{aligned}
 1 \quad & f(t) : -e^{-t} + 1,5e^{-2t} + 2 \\
 & \rightarrow f(t) := -e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t} + 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2 \quad & \text{Dérivée}(f(t), t) \\
 & \rightarrow e^{-t} - 3e^{-2t}
 \end{aligned}$$

Montrer que cette dérivée peut aussi s'écrire : $f'(t) = e^{-2t}(e^t - 3)$.

- c. Résoudre sur $[0 ; +\infty]$ l'inéquation $e^t - 3 \geq 0$.
- d. En déduire le signe de $f'(t)$ sur $[0 ; +\infty]$.
- e. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0 ; +\infty]$.