Série d'exercices – BTS CIRA

EXERCICE 1 – **Signal affine** – Un capteur délivre une tension définie par : $U(t) = 2t + 1$ (U est en volts, t en secondes)

1. Déterminer la tension à $t = 3$.
2. À quel instant la tension vaut 5 V ?
3. Interpréter le coefficient directeur.

EXERCICE 2 – **Erreur quadratique** – On modélise une erreur de mesure par : $e(t) = t^2 - 4t + 3$

1. Factoriser $e(t)$.
2. Déterminer quand l'erreur est nulle.
3. Étudier le signe de l'erreur.
4. À quel instant l'erreur est minimale ?

EXERCICE 3 – **Charge d'un condensateur** – On considère une tension définie par :

$$U(t) = 5(1 - e^{-t}) \text{ (en volts, } t \text{ en secondes)}$$

1. Calculer $U(0)$ et $U(2)$.
2. Déterminer la limite quand $t \to +\infty$.
3. Interpréter physiquement cette limite.

EXERCICE 4 – **Fonction logarithme** – On a : $t = \ln(x)$

1. Déterminer le domaine de définition.
2. Résoudre $\ln(x) = 2$.
3. Donner le sens de variation.

EXERCICE 5 – **Signal sinusoïdal** – On considère le signal défini par : $s(t) = \sin(t)$

1. Donner l'amplitude et la période.
2. Calculer $s(0)$ et $s(\pi/2)$.
3. Tracer l'allure de la courbe.

EXERCICE 6 – **Dérivée** – Soit : $T(t) = t^2 + 3t$

1. Calculer $T'(t)$.
2. Interpréter $T'(t)$.
3. Calculer la vitesse à $t = 2$.

EXERCICE 7 – **Étude de variation** – On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(t) = -t^2 + 4t$

1. Calculer $f'(t)$.
2. Étudier le signe de $f'(t)$.
3. Dresser le tableau de variation.
4. Déterminer le maximum.

EXERCICE 8 – **Produit** – On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(t) = t \cdot e^{-t}$

1. Calculer $f'(t)$.
2. Étudier les variations.
3. Déterminer le maximum.

EXERCICE 9 – **Limites** – Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-t}$, $\lim\limits_{t \to 0^+} \ln(t)$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{t}{t+1}$

EXERCICE 10 – **Résolution approchée** –
On considère la fonction définie par $\mathbb{R}^+$ par : $f(t) = e^{-t} - 0{,}1$

1. Montrer qu'il existe une solution.
2. Trouver une valeur approchée entre 2 et 3.
3. Proposer une méthode (balayage ou dichotomie).

Série d'exercices – Approfondissement BTS CIRA

EXERCICE 11 – **Modèle affine inverse** – Un capteur vérifie : $T(U) = \frac{U-1}{2}$

1. Déterminer la température pour $U = 5$ V.
2. Exprimer U en fonction de T.
3. Interpréter physiquement cette relation.

EXERCICE 12 – **Étude complète d'un trinôme** – Soit $f(t) = 2t^2 - 8t + 6$

1. Calculer $f'(t)$.
2. Étudier les variations de f.
3. Déterminer le minimum.
4. Résoudre $f(t) = 0$.

EXERCICE 13 – **Modèle exponentiel décroissant** – Soit $C(t) = 10e^{-0,5t}$

1. Calculer $C'(t)$.
2. Étudier les variations.
3. Déterminer le temps pour lequel $C(t) = 1$.
4. Interpréter ce résultat.

EXERCICE 14 – **Fonction composée** – Soit $f(t) = \ln(t^2 + 1)$

1. Déterminer le domaine de définition.
2. Calculer $f'(t)$.
3. Étudier les variations.

EXERCICE 15 – **Étude d'un quotient** – Soit $f(t) = \frac{t}{t^2+1}$

1. Calculer $f'(t)$.
2. Étudier le signe de $f'(t)$.
3. Dresser le tableau de variation.
4. Déterminer les extremums.

EXERCICE 16 – **Optimisation (réponse transitoire)** – Soit $f(t) = te^{-t}$

1. Calculer $f'(t)$.
2. Résoudre $f'(t) = 0$.
3. Déterminer le maximum.
4. Interpréter ce maximum.

EXERCICE 17 – **Limite et asymptote** – Soit $f(t) = \frac{2t+1}{t+1}$

1. Déterminer la limite quand $t \to +\infty$.
2. Interpréter graphiquement le résultat.
3. Étudier la limite en $t = -1$.
4. En déduire les asymptotes.

EXERCICE 18 – **Fonction exponentielle composée** – Soit $f(t) = e^{2t-1}$

1. Calculer $f'(t)$.
2. Étudier les variations.
3. Résoudre $f(t) = 1$.

EXERCICE 19 – **Étude globale avec interprétation** – Soit $f(t) = \frac{e^{-t}}{t+1}$

1. Déterminer le domaine de définition.
2. Calculer $f'(t)$.
3. Étudier les variations.
4. Déterminer les limites aux bornes du domaine.
5. Interpréter le comportement du système.

EXERCICE 20 – **Étude du gain d'un filtre du premier ordre** –

On considère un filtre du premier ordre dont le gain en fonction de la pulsation ω est donné par :

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

où $\omega_0 > 0$ est une constante caractéristique du filtre.

1. – **Étude de la fonction** –
   a) Déterminer le domaine de définition de G.
   b) Calculer la limite de $G(\omega)$ lorsque ω tend vers 0.
   c) Calculer la limite de $G(\omega)$ lorsque ω tend vers $+\infty$.
   d) Interpréter ces résultats du point de vue physique.

2. – **Dérivation et variations** –
   a) Écrire $G(\omega)$ sous la forme $(1 + u(\omega))^{-1/2}$.
   b) Calculer la dérivée $G'(\omega)$.
   c) Étudier le signe de $G'(\omega)$.
   d) Dresser le tableau de variation de G.

3. – **Gain en décibels** – On définit le gain en décibels par : $G_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log_{10}(G(\omega))$
   a) Calculer $G_{\text{dB}}(0)$.
   b) Montrer que : $G_{\text{dB}}(\omega_0) \approx -3$ dB
   c) Interpréter ce résultat.

4. – **Recherche de fréquence** – On cherche la pulsation ω telle que $G(\omega) = 0{,}5$.
   a) Montrer que cette équation admet une solution.
   b) Résoudre l ?équation.
   c) Donner une valeur approchée si $\omega_0 = 100$ rad/s.

5. – **Interprétation globale** – Décrire le comportement du filtre (type, rôle, utilisation possible).