Série d'exercices – BTS CIRA

1 Calculs de base

1. Calculer les parties réelle et imaginaire des nombres complexes suivants :
   a) $z = (3 + 2i) + (5 - 4i)$
   b) $z = (1 - i)(2 + 3i)$
2. Mettre sous la forme $a + ib$:
   a) $z = (2 + i)^2$
   b) $z = \dfrac{1 + i}{1 - i}$
3. Déterminer le conjugué et le module de :
   a) $z = 3 - 4i$
   b) $z = -1 + i$
4. Résoudre dans $\mathbb{C}$:
   a) $z^2 + 4 = 0$
   b) $z^2 - 2z + 5 = 0$
5. Écrire sous forme algébrique :
   a) $z = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$
   b) $z = 3e^{i\pi}$
6. Déterminer le module et un argument de :
   a) $z = 1 + i$
   b) $z = -\sqrt{3} + i$
7. Représenter dans le plan complexe les points d'affixes : $z_1 = 2 + i$; $z_2 = -1 - 2i$
8. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que :$|z| = 2$
9. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que :$\mathrm{Re}(z) = 1$
10. On considère $z = 1 + i$.
    a) Écrire z sous forme trigonométrique.
    b) Calculer z^3 sous forme exponentielle puis algébrique.

2 Exercices : Applications en électricité

1. En régime sinusoïdal, une tension est donnée par le nombre complexe :
   $$U = 230e^{j\frac{\pi}{6}}$$
   a) Donner le module et l'argument de U.
   b) Écrire U sous forme algébrique.
2. Une impédance est donnée par :
   $$Z = 10 + 5j\ \Omega$$
   a) Calculer le module de Z.
   b) Déterminer un argument de Z.
   c) Interpréter la nature du dipôle (résistif, inductif ou capacitif).
3. On considère un courant complexe :
   $$I = \frac{U}{Z} \quad \text{avec} \quad U = 100\ \text{V et } Z = 4+3j\ \Omega$$
   a) Calculer I sous forme algébrique.
   b) Donner le module de I.
4. Une impédance d'un circuit RL est donnée par :
   $$Z = R + j\omega L$$
   avec $R = 20\ \Omega$, $L = 0{,}1$ H et $\omega = 100$ rad/s.
   a) Calculer Z sous forme algébrique.
   b) Déterminer son module.
5. Dans un circuit, on a :
   $$Z = 5 - 5j\ \Omega$$
   a) Calculer le module de Z.
   b) Déterminer un argument de Z.
   c) Préciser si le comportement est plutôt inductif ou capacitif.

3 Exercices : Gain en décibels

1. **Filtre RC passe-bas**

   On considère un filtre RC passe-bas alimenté par une tension d'entrée U_e. La fonction de transfert est donnée par :

   $$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

   avec $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$ et $C = 100\,\mathrm{nF}$.

   a) Exprimer le module $|H(j\omega)|$.

   b) Calculer la pulsation de coupure ω_c. On rappelle que dans ce circuit la pulsation de coupure est donnée par :

   $$\omega_c = \frac{1}{RC}$$

   c) Calculer le gain en décibels :

   $$G_{\mathrm{dB}} = 20\log_{10}|H(j\omega)|$$

   pour $\omega = \omega_c$.

   d) Donner la valeur du gain en décibels pour $\omega \ll \omega_c$.

   e) Résoudre l'équation $G_{\mathrm{dB}} = -3$ et vérifier la cohérence avec la pulsation de coupure.

2. **Filtre RL passe-haut**

   On considère un filtre RL passe-haut dont la fonction de transfert est :

   $$H(j\omega) = \frac{j\omega L}{R + j\omega L}$$

   avec $R = 100\,\Omega$ et $L = 0{,}1\,\mathrm{H}$.

   a) Exprimer le module $|H(j\omega)|$.

   b) Déterminer la pulsation de coupure ω_c. On rappelle que dans ce circuit la pulsation de coupure est donnée par :

   $$\omega_c = \frac{R}{L}$$

   c) Calculer le gain en décibels pour $\omega = \omega_c$.

   d) Déterminer le comportement du gain en décibels lorsque $\omega \to +\infty$.

   e) Résoudre l'équation $G_{\mathrm{dB}} = -3$ et vérifier la cohérence avec la pulsation de coupure.