

## Exercice : Étude d'un filtre RC

On considère un circuit électrique composé :

- d'une résistance  $R = 10\text{ k}\Omega$
- d'un condensateur  $C = 100\text{ }\mu\text{F}$
- d'une source de tension  $e(t)$

Le condensateur est initialement déchargé :

$$u_C(0) = 0$$

À  $t = 0$ , on applique une tension constante :

$$e(t) = 5\text{ V} \quad \text{pour } t \geq 0$$

On s'intéresse à la tension aux bornes du condensateur  $u_C(t)$ .

### Questions

#### 1. Mise en équation

À l'aide des lois de l'électricité (loi des mailles et relation courant/tension du condensateur), montrer que  $u_C(t)$  vérifie :

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = e(t)$$

#### 2. Résolution de l'équation différentielle

- Résoudre cette équation pour  $t \geq 0$
- Montrer que la solution est de la forme :

$$u_C(t) = A (1 - e^{-t/\tau})$$

où  $\tau = RC$

- Calculer la valeur de  $\tau$

#### 3. Exploitation physique

- Déterminer  $\lim_{t \rightarrow +\infty} u_C(t)$
- Calculer  $u_C(\tau)$
- Interpréter la constante de temps  $\tau$

#### 4. Étude graphique

- Tracer l'allure de  $u_C(t)$
- Indiquer la valeur finale, la constante de temps et la tangente à l'origine

#### 5. Application industrielle

- Expliquer pourquoi ce montage est un filtre passe-bas
- Décrire le comportement du circuit si le signal d'entrée varie très rapidement

## Exercice : Filtre RC soumis à un signal sinusoïdal

On considère le même circuit RC avec :

- $R = 10 \text{ k}\Omega$
- $C = 100 \text{ }\mu\text{F}$

La tension d'entrée est maintenant :

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t)$$

avec  $E_0 = 5 \text{ V}$ .

### Questions

#### 1. Équation différentielle

Montrer que  $u_C(t)$  vérifie :

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E_0 \cos(\omega t)$$

#### 2. Solution générale

- Donner la solution générale comme somme d'une solution homogène et d'une solution particulière
- Déterminer la solution homogène

#### 3. Solution particulière

On cherche une solution particulière sous la forme :

$$u_p(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

- Déterminer  $A$  et  $B$
- En déduire l'expression de  $u_p(t)$

#### 4. Régime permanent

- Donner l'expression du régime permanent
- Mettre la solution sous la forme :

$$u_C(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$$

- Exprimer  $U_m$  et  $\varphi$  en fonction de  $\omega$ ,  $R$  et  $C$

#### 5. Interprétation

- Étudier le comportement pour  $\omega \rightarrow 0$
- Étudier le comportement pour  $\omega \rightarrow +\infty$
- Conclure sur la nature du filtre

## Exercice : Étude d'un filtre RC et diagramme de Bode

On considère un circuit RC série composé de :

- une résistance  $R = 10\text{ k}\Omega$
- un condensateur  $C = 100\text{ nF}$

La tension d'entrée est  $e(t)$  et la tension de sortie  $u_C(t)$  est mesurée aux bornes du condensateur.

### 1. Fonction de transfert

1. Établir l'expression de la fonction de transfert  $H(j\omega)$  du circuit :

$$H(j\omega) = \frac{U_C(j\omega)}{E(j\omega)}$$

2. Montrer que :

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

### 2. Gain et phase

1. Déterminer le module  $|H(j\omega)|$
2. Montrer que :

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}$$

3. Exprimer le gain en décibels :

$$G_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log_{10} |H(j\omega)|$$

4. Déterminer l'argument  $\varphi(\omega)$  :

$$\varphi(\omega) = -\arctan(\omega RC)$$

### 3. Fréquence de coupure

1. Définir la fréquence de coupure  $f_c$
2. Montrer que :

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC}$$

3. Calculer sa valeur numérique

## 4. Diagramme de Bode

1. Tracer le diagramme de Bode du gain (asymptotique puis réel)
2. Tracer le diagramme de la phase
3. Indiquer les points caractéristiques :
  - gain à basse fréquence
  - pente après  $f_c$
  - valeur du gain à  $f_c$

## 5. Étude du comportement

1. Étudier le comportement pour  $\omega \ll \omega_c$
2. Étudier le comportement pour  $\omega \gg \omega_c$
3. Conclure sur la nature du filtre

## 6. Application

On applique un signal sinusoïdal de fréquence :

$$f = 10 f_c$$

1. Le signal est-il atténué ou non ?
2. Donner une estimation du gain en dB
3. Décrire qualitativement le signal de sortie