TRANSFORMATION DE LAPLACE

Dans ce module, on étudie et on exploite la transformation de Laplace en vue de déterminer les solutions causales d'une équation différentielle linéaire. Cette présentation est à mener en liaison étroite avec les enseignements des autres disciplines où la transformation de Laplace permet d'obtenir la réponse d'un système linéaire usuel à un signal d'entrée donné.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Transformation de Laplace		
Transformée de Laplace d'une fonction causale *f*.		La théorie générale des intégrales impropres est hors programme.
Transformée de Laplace des fonctions causales usuelles.		On se limite aux fonctions usuelles suivantes : $t \mapsto U(t)$; $t \mapsto t^n U(t)$; $t \mapsto \mathrm{e}^{at} U(t)$; $t \mapsto \sin(\omega t)U(t)$ et $t \mapsto \cos(\omega t)U(t)$ avec *U* la fonction unité, *n* un entier naturel, *a* et ω deux réels.
Propriétés de la transformation de Laplace : – linéarité ; – effet d'une translation ou d'un changement d'échelle sur la variable ; – effet de la multiplication par e^{-at}.	• Représenter graphiquement une fonction causale donnée par une expression. • Déterminer une expression d'une fonction causale dont la représentation graphique est de type « créneau » ou « rampe ». • Déterminer la transformée de Laplace d'une fonction causale simple, dont les fonctions de type « créneau » et « rampe ». • Déterminer la fonction causale (original) dont la transformée de Laplace est donnée.	On se limite au cas où les fonctions données ou recherchées sont : – soit des combinaisons linéaires à coefficients réels de fonctions de la forme $t \mapsto U(t-\alpha)$ et $t \mapsto tU(t-\alpha)$; – soit de la forme $t \mapsto U(t-\alpha)\mathrm{e}^{rt}$; où α est un nombre réel positif et *r* un réel. Dans les autres cas, le calcul est facilité par l'utilisation d'un logiciel.
Théorème de la valeur initiale et théorème de la valeur finale.		L'exploitation de situations issues des autres disciplines permet d'illustrer la pertinence de ce théorème.

Transformée de Laplace d'une dérivée.	• Exploiter la transformation de Laplace pour résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1 ou 2 à coefficients constants.	Pour le second membre, on se limite au cas où les fonctions données ou recherchées sont : – soit des combinaisons linéaires à coefficients réels de fonctions de la forme $t \mapsto U(t-\alpha)$ et $t \mapsto tU(t-\alpha)$; – soit de la forme $t \mapsto U(t-\alpha)\mathrm{e}^{rt}$; où α est un nombre réel positif et r un réel. ⇆ Fonction de transfert d'un système linéaire. Application à la stabilité.
Transformée de Laplace d'une primitive.		En liaison avec les enseignements d'autres disciplines, on étudie un exemple d'équation différentielle de la forme $a\,y'(t) + b\,y(t) + c\int_0^t y(s)\,\mathrm{d}s = f(t)$ où a, b, c sont des constantes réelles et f une fonction causale.