S3. Mathématiques

L'enseignement des mathématiques dans les sections de techniciens supérieur Contrôle Industriel et Régulation Automatique se réfère aux dispositions figurant aux annexes I et II de l'arrêté du 4 juin 2013 fixant les objectifs, les contenus de l'enseignement et le référentiel des capacités du domaine des mathématiques pour les brevets de technicien supérieur.

I – Programme

Le programme de mathématiques est constitué des modules suivants :

Nombres complexes, à l'exception du paragraphe *« Transformations ».*

Fonctions d'une variable réelle, à l'exception des paragraphes *« Approximation locale d'une fonction » et « Courbes paramétrées »*

Fonctions d'une variable réelle et modélisation du signal, à l'exception de la dérivation de la fonction arctangente et ses composées.

Calcul intégral.

Équations différentielles.

Séries de Fourier.

Transformation de Laplace.

Transformation en *Z*.

II – Lignes directrices

L'étude des signaux numériques ou analogiques constitue un des objectifs essentiels de la formation des techniciens supérieurs CIRA car elle intervient aussi bien en électronique proprement dite que dans le cadre plus large des systèmes automatisés. Cette étude porte à la fois sur des problèmes de description (analyse et synthèse), d'évolution et de commande. Selon que l'on s'intéresse aux aspects continus ou discrets, l'état de tels systèmes est modélisé par des fonctions ou des suites dont il s'agit alors de prédire le comportement (états initial, final, transitoire) par des transformations temps-fréquence appropriées et des tracés géométriques adéquats. Les outils mathématiques ainsi développés feront largement appel aux ressources de l'informatique. Aussi exploitera-t-on en classe les possibilités de programmation, d'affichage et de calcul formel de l'ordinateur en utilisant les logiciels ad hoc.

Organisation des contenus. C'est en fonction de ces objectifs que l'enseignement des mathématiques est conçu. Organisé en modules, il est essentiel d'en souligner, mais aussi d'en distinguer les angles culturels, historiques, et professionnalisants. Les notes qui suivent précisent certains points et fournissent des exemples de contextes propices aux mathématiques en liaison avec les autres disciplines :

Nombres complexes. L'argument et le module d'un produit seront énoncés.

Le moment opportun, la dérivée d'une exponentielle imaginaire de pulsation ω, $t \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\varphi)}$, sera mentionnée.

L'étude graphique des isomodules et des isophases de quelques expressions complexes, dont la quantité $\frac{z}{1+z}$, pourra déboucher sur des tracés d'abaques dans différents systèmes de coordonnées (partie réelle, partie imaginaire ; module, phase ; log du module, phase).

Les supports des arcs $\omega \to z(\omega)$, en particulier pour $z(\omega) = \frac{G}{1+\mathrm{i}\tau\omega}$; $z(\omega) = \frac{G}{(1+\mathrm{i}\tau_1\omega)(1+\mathrm{i}\tau_2\omega)}$.et $z(\omega) = \frac{G}{\mathrm{i}\omega(1+\mathrm{i}\tau\omega)}$, où $G,\ \tau,\ \tau_1, \tau_2 > 0$, pourront être dessinés dans différents systèmes de coordonnées.

Fonction d'une variable réelle. L'étude des développements limités n'est pas un objectif du programme. Après avoir fait apparaître des taux d'accroissements, on fera cependant observer que les quantités $1-e^{-s}$ et $\frac{1}{2}\frac{1-e^{-s}}{1+e^{-s}}$ sont voisines, voire très voisines de s quand s (qui peut être réel ou complexe) l'est de 0.

Fonction d'une variable réelle et modélisation du signal. On expliquera comment *T*-périodiser un motif donné, en commençant par le cas simple où son support n'excède pas *T*.
En situation, on observera l'approximation globale d'une fonction périodique par les sommes partielle de sa série de Fourier.

Calcul intégral. Le moment venu, on étendra brièvement le contexte aux fonctions à valeurs complexes, de façon à intégrer sur une période les harmoniques $t \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\omega t}$ et à en tirer toutes les conséquences.

Équations différentielles. Dans la limite du programme (ordres 1 et 2) sur des exemples et pour des conditions initiales données, on examinera la réponse à un stimulus (i.e. second membre) de type : échelon, rampe, ou impulsion rectangulaire (différence de deux échelons). Dans ce dernier cas, on choisira nulles les conditions initiales, on diminuera progressivement le décalage temporel entre les deux échelons, tandis qu'on élèvera leur hauteur pour maintenir une portion d'aire constante. Sans en développer les aspects théoriques, on devinera ainsi l'effet d'une impulsion de Dirac et on introduira par la même la notion de réponse impulsionnelle.

Dans la limite du programme (ordres 1 et 2), et sur des exemples, on remarquera que, quelles que soient les conditions initiales, la réponse à une excitation (i.e. un second membre) du type $t \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ est asymptotiquement de la même forme (à un déphasage et une atténuation ou amplification près) dès lors que les solutions complexes des racines des équations caractéristiques $ap+b=0$ et $ap^2+bp+c=0$ sont à partie réelle strictement négative.

Séries de Fourier On indiquera par ailleurs l'existence des coefficients c_k, les seuls qu'un appareil de mesure renvoie effectivement, et on en donnera l'expression intégrale. À titre de prolongement, on pourra considérer qu'un signal de durée finie est une fonction de très grande période $T, T \to +\infty$, dont les raies spectrales sont par conséquent infiniment proches et définir ainsi par passage à la limite la densité spectrale d'amplitude dans le cas général.

Transformation de Laplace. On notera que la transformée d'une dérivée donne naissance à un terme constant, en général nul (mais pas toujours), renvoyant à l'instant $t=0^-$. On donnera sens à la notion de transmittance de Laplace d'un système régi par une équation différentielle linéaire et on constatera, sur des exemples, que les transmittances de Laplace de deux étages indépendants mis en cascade se multiplient.

On déterminera, sur des exemples, l'expression exacte d'une solution d'une équation différentielle en faisant usage de la transformée de Laplace. On relèvera que poser $p=\mathrm{i}\omega$ dans l'équation caractéristique renvoie à la réponse en fréquence – ou transmittance isochrone – du système, solution asymptotique à l'excitation (i.e. second membre) $t \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$. Après en avoir donné une justification mathématique, on interprétera alors physiquement les théorèmes de la valeur initiale (en réalité : $t=0^+$) et de la valeur finale (en réalité : $t=+\infty$).

On déterminera, sur des exemples, l'expression exacte d'une solution d'une équation différentielle en faisant usage de la transformée de Laplace. On relèvera que poser $p=\mathrm{i}\omega$ dans l'équation caractéristique renvoie à la réponse en fréquence du système, solution asymptotique à l'excitation $t \to \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$.

Transformation en z. On donnera sens à la notion de transmittance en Z d'un système régi par une équation linéaire aux différences finies et on constatera, sur des exemples, que les transmittances en Z de deux étages indépendants mis en cascade se multiplient.
On comparera, sur des exemples, l'expression exacte d'une solution d'une équation différentielle et celle obtenue par discrétisation du temps en programmant la correspondance d'Euler ($p \leftrightarrow \frac{1-z^{-1}}{T_e}$), fondée sur une approximation de la dérivée, et la correspondance bilinéaire ($p \leftrightarrow \frac{1}{2T_e}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$), fondée sur une approximation de l'intégrale.

Organisation des études
L'horaire est de 2 heures + 1 heure (TD) en première année et de 1 heure + 1 heure (TD) en seconde année. Un usage raisonnable des heures d'AP permettra au professeur de mathématique d'intervenir en co-animation avec les professeuirs enseignant la physique-chimie des procédés industriels et ceux enseignant le contrôle-industriel-

régulation-automatique sur certains TD ou TP afin de mieux cerner les difficultés mathématiques que peuvent rencontrer en situation professionnelle certains élèves.

.