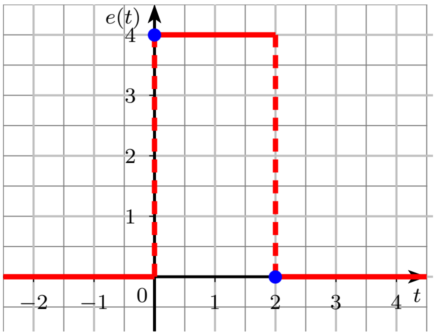
Contrôle No 2

EXERCICE 1

1. On considère la fonction causale e définie sur $\mathbb{R}$ par : $e(t) = 4\left[U(t) - U(t-2)\right]$

   (a) La représentation graphique de la fonction e dans un repère orthonormal est :



   (b) On note E la transformée de Laplace de la fonction e, notée $E(p) = \dfrac{4}{p}(1 - e^{-2p})$.

2. On considère la fonction s telle que $4s'(t) + s(t) = e(t)$ et $s(0) = 0$

   La transformée de cette expression est :

   $4\Big(p \times S(p) - 0\Big) + S(p) = E(p)$ donc $(4p+1) \times S(p) = \dfrac{4}{p}(1 - e^{-2p}))$

   donc $(p + \frac{1}{4}) \times S(p) = \dfrac{1}{p}(1 - e^{-2p}))$ en divisant les deux membres de l'égalité par 4

   donc $S(p) = \dfrac{1}{p\left(p + \dfrac{1}{4}\right)}\left(1 - \mathrm{e}^{-2p}\right)$

3. Déterminer les réels A et B tels que : $G(p) = \dfrac{1}{p\left(p + \frac{1}{4}\right)} = \dfrac{A}{p} + \dfrac{B}{p + \dfrac{1}{4}}$

   On a d'une part : $A = \lim\limits_{p \to 0} p \times G(p) = \dfrac{1}{\frac{1}{4}} = 4$

   et d'autre part : $A = \lim\limits_{p \to -\frac{1}{4}} (p + \frac{1}{4}) \times G(p) = \dfrac{1}{-\frac{1}{4}} = -4$

   donc $\dfrac{1}{p\left(p + \frac{1}{4}\right)} = 4 \times \dfrac{1}{p} \; - \; 4 \times \dfrac{1}{p + \frac{1}{4}}$

4. Tableau complété ci-dessous dans lequel f représente la fonction causale associée à F :

$F(p)$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1}{p} \times \mathrm{e}^{-2p}$	$\dfrac{1}{p + \frac{1}{4}}$	$\dfrac{1}{p + \frac{1}{4}} \times \mathrm{e}^{-2p}$
$f(t)$	$U(t)$	$U(t-2)$	$e^{-\frac{t}{4}}U(t)$	$e^{-\frac{t-2}{4}}U(t-2)$

5. (a) Détermination de $s(t)$, t désignant un nombre réel quelconque.

On a obtenu que $S(p) = \left(4 \times \dfrac{1}{p} - 4 \times \dfrac{1}{p+\frac{1}{4}}\right) \times (1 - e^{-2p})$

donc $S(p) = \left(4 \times \dfrac{1}{p} - 4 \times \dfrac{1}{p+\frac{1}{4}}\right) - \left(4 \times \dfrac{1}{p} - 4 \times \dfrac{1}{p+\frac{1}{4}}\right) e^{-2p}$

donc $s(t) = \left(4U(t) - 4e^{-\frac{t}{4}}U(t)\right) - \left(4U(t-2) - 4e^{-\frac{t-2}{4}}U(t-2)\right)$

(b) Vérification :

Si $t < 0$ alors $U(t) = U(t-2) = 0$ donc $s(t) = 0 - 0 = 0$

Si $0 \leqslant t < 2$ alors $U(t) = 1$ et $U(t-2) = 0$ donc $s(t) = 4 - 4e^{-\frac{t}{4}} - 0 = 4 - 4e^{-\frac{t}{4}}$

Si $2 \leqslant t$ alors $U(t) = U(t-2) = 1$ donc $s(t) = 4 - 4e^{-\frac{t}{4}} - \left(4 - 4e^{-\frac{t-2}{4}}\right)$

C'est à dire $s(t) = 4 - 4e^{-\frac{t}{4}} - 4 + 4e^{-\frac{t}{4}+\frac{1}{2}} = -4e^{-\frac{t}{4}} + 4e^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{t}{4}}$

On a donc obtenu que : $\begin{cases} s(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ s(t) = 4 - 4\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}} & \text{si } 0 \leqslant t < 2 \\ s(t) = 4\mathrm{e}^{-\frac{t}{4}}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} - 1\right) & \text{si } t \geqslant 2 \end{cases}$

EXERCICE 2

1. À l'aide de la table des transformées, on obtient directement :
   $E(p) = 8\left[\frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2}\mathrm{e}^{-p\tau}\right] = \frac{8}{p^2}\left(1-\mathrm{e}^{-p\tau}\right)$
2. On a $\mathscr{L}\left(g''(t)\right) \;=\; p^2G(p) - pg(0) - g'(0) \;=\; p^2G(p)$ car $g(0) = 0$ et $g'(0) = 0$

   d'où, en prenant la transformée de Laplace de l'équation différentielle,

$$\begin{aligned}
p^2G(p) + 4G(p) &= E(p)\\
(p^2+4)G(p) &= E(p)\\
G(p) &= \frac{E(p)}{p^2+4}\\
G(p) &= \frac{8}{p^2(p^2+4)}\left(1-\mathrm{e}^{-p\tau}\right)
\end{aligned}$$

3. On a, en réduisant au même dénominateur : $\dfrac{A}{p^2} + \dfrac{B}{p^2+4} \;=\; \dfrac{A(p^2+4)+Bp^2}{p^2(p^2+4)} \;=\; \dfrac{(A+B)p^2+4A}{p^2(p^2+4)}$

   Par identification avec la relation demandée, on obtient le système $\begin{cases} A+B=0\\ 4A=8\end{cases}$

   d'où $A = 2$ et $B = -2$.

   On a alors $\dfrac{8}{p^2(p^2+4)} = \dfrac{2}{p^2} - \dfrac{2}{p^2+4}$
4. On a $\mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{p^2}\right) = t\mathrm{U}(t)$ et $\mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{2}{p^2+4}\right) = \sin(2t)\mathrm{U}(t)$ donc $\mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{8}{p^2(p^2+4)}\right) = \left(2t - \sin(2t)\right)\mathrm{U}(t)$
5. Avec les notations de l'énoncé, on obtient : $\mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{8}{p^2(p^2+4)}\right) = g_0(t)$

   On a $G(p) = \dfrac{8}{p^2(p^2+4)} - \dfrac{8\mathrm{e}^{-p\tau}}{p^2(p^2+4)}$ d'où $g(t) = g_0(t) - g_0(t-\tau)$
6. Pour $t \geq \tau$, on a $\begin{cases}\mathrm{U}(t) = 1\\ \mathrm{U}(t-\tau) = 1\end{cases}$ d'où $\begin{aligned} g(t) &= 2t - \sin(2t) - \left[2(t-\tau) - \sin\left(2(t-\tau)\right)\right]\\ &= 2\tau - \sin(2t) + \sin(2t-2\tau)\end{aligned}$
7. Pour $\tau = \pi$ et $t \geq \tau$, on a

$$\begin{aligned}
g(t) &= 2\pi - \sin(2t) + \sin(2t-2\pi) \qquad \text{or } \sin(2t-2\pi) = \sin(2t)\\
&= 2\pi - \sin(2t) + \sin(2t)\\
&= 2\pi
\end{aligned}$$