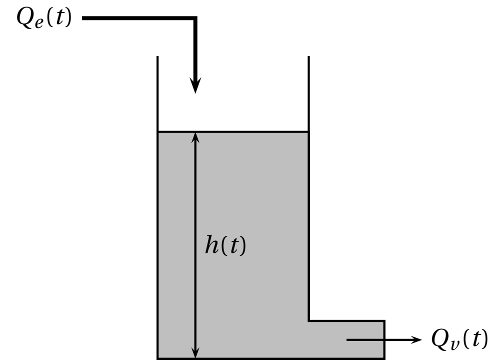
On considère le bac de stockage cylindrique représenté ci-dessous.
À l'instant t, en seconde (s), on note $h(t)$ la hauteur d'eau, en mètre (m), dans le bac,
$Q_e(t)$ le débit d'entrée, en m^3s^{-1}, et $Q_v(t)$ le débit de vidange, en m^3s^{-1}.



À l'instant $t = 0$, le bac est vide, donc :

$$h(0) = 0.$$

La conservation de la matière permet d'écrire, pour tout $t \geqslant 0$:

$$Q_e(t) = Sh'(t) + Q_v(t)$$

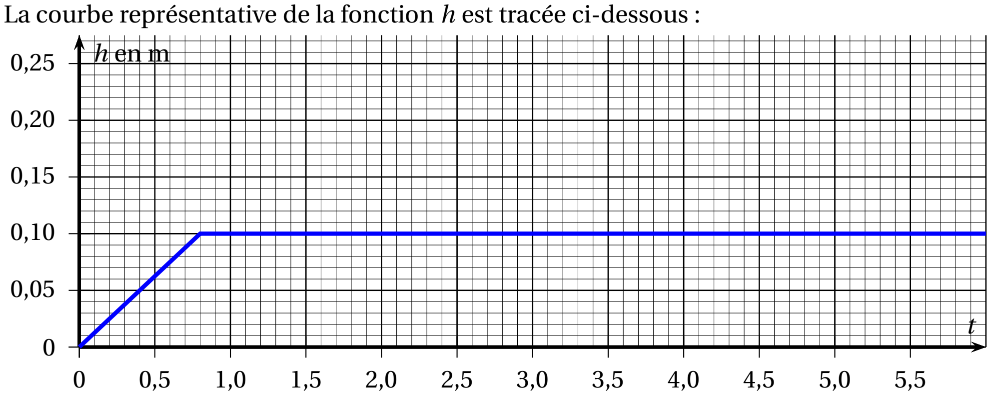
où S est l'aire de la base du bac, exprimée en m^2, et h' la fonction dérivée de h.
Dans l'exercice, on a $S = 8\ \text{m}^2$.
De plus on suppose, en faisant une approximation, que : $Q_v(t) = 2h(t)$.

On a donc : $8h'(t) + 2h(t) = Q_e(t)$.

On veut que la hauteur d'eau $h(t)$ atteigne 10 cm, soit 0,1 m.
Pour cela, on agit sur le débit d'entrée $Q_e(t)$.
On souhaite obtenir rapidement la hauteur de 10 cm d'eau dans le bac.
Pour cela, on modifie le débit d'entrée. On prend désormais pour tout réel $t \geqslant 0$: $Q_e(t) = \mathcal{U}(t) - 0{,}8\mathcal{U}(t - 0{,}9)$
où $\mathcal{U}$ désigne la fonction échelon unité : $\mathcal{U}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ 1 & \text{si} \quad t \geqslant 0 \end{cases}$

h vérifie donc, pour tout réel $t \geqslant 0$: $\boxed{8h'(t) + 2h(t) = \mathcal{U}(t) - 0{,}8\mathcal{U}(t - 0{,}9) \quad (E).}$
De plus, on rappelle que $h(0) = 0$.

1. Représenter sur la copie $Q_e(t)$ en fonction de t, pour $t \geqslant 0$.
   (On tracera un repère orthonormé. Sur chacun des axes, 10 cm représenteront une unité.)
2. On note $H : p \longmapsto H(p)$ la transformée de Laplace de $h : t \longmapsto h(t)$.
   a. Écrire l'égalité obtenue en appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'égalité (E).
   b. Montrer que $H(p) = \dfrac{1 - 0{,}8\text{e}^{-0{,}9p}}{(2 + 8p)p}$.
3. On note : $A(p) = \dfrac{1}{(2 + 8p)p}$.
   a. Vérifier que : $A(p) = \dfrac{0{,}5}{p} - \dfrac{4}{2 + 8p}$.
   b. Comme $\dfrac{4}{2 + 8p} = \dfrac{0{,}5}{p + 0{,}25}$ on a aussi : $A(p) = \dfrac{0{,}5}{p} - \dfrac{0{,}5}{p + 0{,}25}$.
   En déduire l'original $a(t)$ de $A(p)$.
   c. On remarque que : $H(P) = A(p) \times \left(1 - 0{,}8\text{e}^{-0{,}9p}\right) = A(p) - 0{,}8A(p)\text{e}^{-0{,}9p}$.
   Déterminer une expression de $h(t)$ pour tout réel $t \geqslant 0$.
4. La courbe représentative de la fonction h est tracée ci-dessous :



Estimer graphiquement le gain de temps réalisé pour atteindre la hauteur de 10 cm.