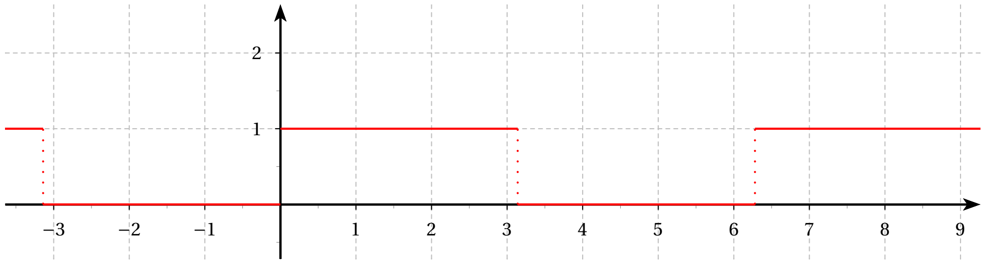
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 1$ sur $[0;\pi[$, $f(t) = 0$ sur $[\pi;2\pi[$; f est 2π-périodique

1. Dessiner f sur au moins deux périodes



2. Calculer a_0 et V_{eff}^2

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\,dt$$
$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\times\left(\int_0^{\pi} f(t)\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} f(t)\,dt\right)$$
$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\times\left(\int_0^{\pi} 1\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} 0\,dt\right)$$
$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\times\left(\left[t\right]_0^{\pi} \quad + \quad 0\right)$$
$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\times(\pi \quad + \quad 0)$$
$$\boxed{a_0 = \frac{1}{2}}$$

$$V_{eff}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^2(t)\,dt \qquad \text{car } f^2 \text{ est } 2\pi\text{-périodique}$$
$$V_{eff}^2 = \frac{1}{2\pi}\times\left(\int_0^{\pi} f^2(t)\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} f^2(t)\,dt\right) \qquad \text{d'après la relation de Chasles}$$
$$V_{eff}^2 = \frac{1}{2\pi}\times\left(\int_0^{\pi} 1^2\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} 0^2\,dt\right) \quad \text{car } f(t) = \begin{cases} t & \text{sur } [0;\pi] \\ 0 & \text{sur } [\pi;2\pi] \end{cases}$$
$$V_{eff}^2 = \frac{1}{2\pi}\times\left(\int_0^{\pi} 1\,dt \quad + \quad 0\right)$$
$$V_{eff}^2 = \frac{1}{2\pi}\times[t]_0^{\pi}$$
$$V_{eff}^2 = \frac{1}{2\pi}\times\pi$$
$$\boxed{V_{eff}^2 = \frac{1}{2}}$$

3. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, calculer pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, a_n et b_n

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt \text{ car } f \text{ est une fonction } 2\pi\text{-périodique}$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\times\left(\int_0^{\pi} f(t)\cos nt\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt\right) \text{ d'après le relation de Chasles}$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\times\left(\int_0^{\pi} 1\cos nt\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} 0\cos nt\,dt\right) \text{ car } f(t) = \begin{cases} t & \text{sur } [0;\pi] \\ 0 & \text{sur } [\pi;2\pi] \end{cases}$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\times\left(\left[\frac{\sin nt}{n}\right]_0^{\pi} \quad + \quad 0\right)$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\times(0-0 \quad + \quad 0) \text{ car } \sin(n\pi) = 0$$
$$\boxed{a_n = 0}$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt \text{ car } f \text{ est une fonction } 2\pi\text{-périodique}$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\times\left(\int_0^{\pi} f(t)\sin nt\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt\right) \text{ d'après le relation de Chasles}$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\times\left(\int_0^{\pi} 1\sin nt\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} 0\sin nt\,dt\right) \text{ car } f(t) = \begin{cases} t & \text{sur } [0;\pi] \\ 0 & \text{sur } [\pi;2\pi] \end{cases}$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\times\left(\left[\frac{-\cos nt}{n}\right]_0^{\pi} \quad + \quad 0\right)$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\times\left(\frac{-(-1)^n-(-1)}{n} \quad + \quad 0\right) \text{ car } \cos(n\pi) = (-1)^n$$
$$\boxed{b_n = \frac{1-(-1)^n}{n\pi}}$$

4. Expliciter $S_5(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{5} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$

n	0	1	2	3	4	5
a_n	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0	0
b_n	$\emptyset$	$\frac{2}{\pi}$	0	$\frac{2}{3\pi}$	0	$\frac{2}{5\pi}$

donc $\boxed{S_5(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin t + \frac{2}{3\pi}\sin(3t) + \frac{2}{5\pi}\sin(5t)}$

Le graphe est alors le suivant :