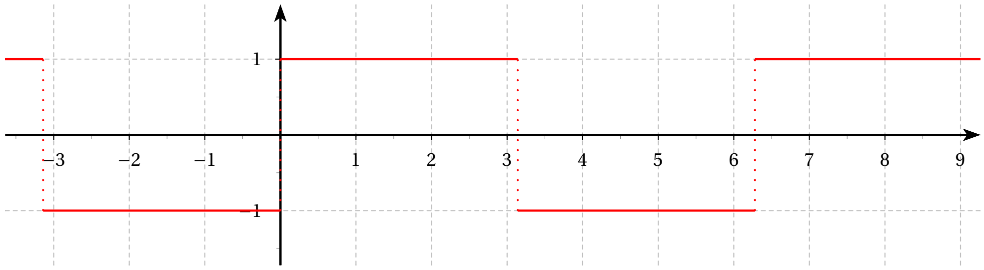
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 1$ sur $]0;\pi[$, impaire et $f(k\pi) = 0$ où $k \in \mathbb{Z}$; f est 2π-périodique

1. Dessiner f sur au moins deux périodes



2. Calculer a_0 et V_{eff}^2

$a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)dt$

Les aires se compensent

donc $\boxed{a_0 = 0}$

$V_{eff}^2 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)dt$ car f^2 est 2π-périodique

$V_{eff}^2 = \dfrac{1}{2\pi} \times 2 \times \displaystyle\int_{0}^{\pi} f^2(t)dt$ car f est impaire donc f^2 est paire

$V_{eff}^2 = \dfrac{1}{\pi} \times \displaystyle\int_{0}^{\pi} 1dt$

$V_{eff}^2 = \dfrac{1}{\pi} \times [t]_0^{\pi}$

$V_{eff}^2 = \dfrac{1}{\pi} \times \pi$

$\boxed{V_{eff}^2 = 1}$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_n et b_n

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$a_n = \dfrac{2}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos ntdt$ car f est une fonction 2π-périodique

Or f est impaire et cos est paire donc leur produit est impair.

L'intégrale sur un intervalle centré en 0 est donc nulle. On donc $\boxed{a_n = 0}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$b_n = \dfrac{2}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ntdt$ car $f$est une fonction 2π-périodique

$b_n = \dfrac{2}{2\pi} \times 2 \times \displaystyle\int_{0}^{\pi} f(t)\sin ntdt$ car f est une fonction 2π-périodique

$b_n = \dfrac{2}{\pi} \times \displaystyle\int_{0}^{\pi} f(t)\sin ntdt$

$b_n = \dfrac{2}{\pi} \times \displaystyle\int_{0}^{\pi} 1\sin ntdt$ car $f(t) = 1$ sur $[0;\pi]$

$b_n = \dfrac{2}{\pi} \times \left[\dfrac{-\cos nt}{n}\right]_0^{\pi}$

$b_n = \dfrac{2}{\pi} \times \left(\dfrac{-(-1)^n - (-1)}{n}\right)$ car $\cos(n\pi) = (-1)^n$

$\boxed{b_n = \dfrac{2(1-(-1)^n)}{n\pi}}$

4. Expliciter $S_5(t) = a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{5} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$

n	0	1	2	3	4	5
a_n	0	0	0	0	0	0
b_n	$\emptyset$	$\dfrac{4}{\pi}$	0	$\dfrac{4}{3\pi}$	0	$\dfrac{4}{5\pi}$

donc $\boxed{S_5(t) = \frac{4}{\pi}\sin t + \frac{4}{3\pi}\sin(3t) + \frac{4}{5\pi}\sin(5t)}$

Le graphe est alors le suivant :