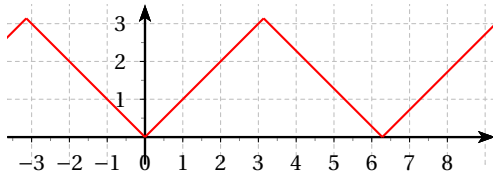


Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(t) = t$ sur $]0; \pi[$, paire, 2π -périodique.

1. Dessiner f sur au moins deux périodes



2. Calculer a_0 et V_{eff}^2

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) dt & V_{eff}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(t) dt \quad \text{car } f^2 \text{ est } 2\pi\text{-périodique} \\
 a_0 &= \frac{1}{2\pi} \times 2 \times \int_0^{+\pi} f(t) dt & V_{eff}^2 &= \frac{1}{2\pi} \times 2 \times \int_0^{\pi} f^2(t) dt \quad \text{car } f \text{ est paire donc } f^2 \text{ est} \\
 & & & \text{aussi} \\
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \times \int_0^{+\pi} t dt & V_{eff}^2 &= \frac{1}{\pi} \times \int_0^{\pi} t^2 dt \\
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \times \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{+\pi} & V_{eff}^2 &= \frac{1}{\pi} \times \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{\pi} \\
 a_0 &= \frac{1}{\pi} \times \frac{\pi^2}{2} & V_{eff}^2 &= \frac{1}{\pi} \times \frac{\pi^3}{3} \\
 \text{donc } a_0 &= \frac{\pi}{2} & V_{eff}^2 &= \frac{\pi^2}{3}
 \end{aligned}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_n et b_n

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$a_n = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt \quad \text{car } f \text{ est une fonction } 2\pi\text{-périodique}$$

Or f est paire et \cos est paire donc leur produit est pair.

$$a_n = \frac{2}{2\pi} \times 2 \times \int_0^{\pi} f(t) \cos nt dt$$

Intégrons $\int_0^{\pi} t \cos nt dt$ par parties

On pose $u(t) = t$ et $v'(t) = \cos nt$

On calcule $u'(t) = 1$ et $v(t) = \frac{\sin nt}{n}$

$$\text{On obtient : } \int_0^{\pi} t \cos nt dt = \left[t \times \frac{\sin nt}{n} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1 \times \frac{\sin nt}{n} dt$$

$$\text{donc } \int_0^{\pi} t \cos nt dt = \left(\pi \times \frac{\sin n\pi}{n} - 0 \right) - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nt dt$$

$$\text{puis } \int_0^{\pi} t \cos nt dt = 0 - \frac{1}{n} \left[\frac{-\cos nt}{n} \right]_0^{\pi}$$

$$\text{puis } \int_0^{\pi} t \cos nt dt = - \frac{1}{n} \left(\frac{-\cos n\pi + 1}{n} \right)$$

$$\text{donc } \int_0^{\pi} t \cos nt dt = - \frac{1}{n^2} (1 - (-1)^n)$$

$$a_n = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2\pi}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt \text{ car } f \text{ est une fonction } 2\pi\text{-périodique}$$

Or f est paire et \sin est impaire donc leur produit est impair.

L'intégrale sur un intervalle centré en 0 est donc nulle. On donc $b_n = 0$

4. Expliciter $S_5(t) = a_0 + \sum_{n=1}^5 a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$

n	0	1	2	3	4	5
a_n	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{4}{\pi}$	0	$\frac{4}{9\pi}$	0	$\frac{4}{25\pi}$
b_n	\emptyset	0	0	0	0	0

donc
$$S_5(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cos t - \frac{4}{9\pi} \cos(3t) - \frac{4}{25\pi} \cos(5t)$$

Le graphe est alors le suivant :

