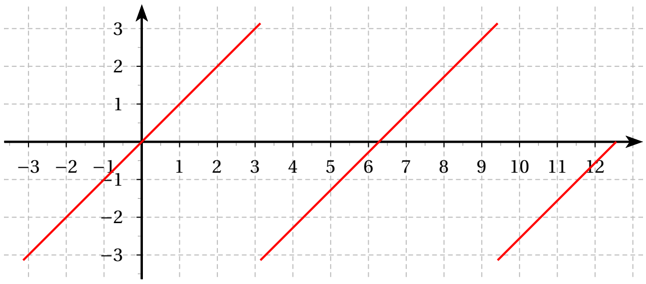
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = t$ sur $]0;\pi[$, impaire et 2π-périodique et $f(k\pi) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$

1. Dessiner f sur au moins deux périodes



2. Calculer a_0 et V_{eff}^2

$a_0 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\,dt$
or f est impaire
donc $\boxed{a_0 = 0}$

$V_{eff}^2 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,dt$ car f^2 est 2π-périodique

$V_{eff}^2 = \dfrac{1}{2\pi} \times 2 \times \displaystyle\int_{0}^{\pi} f^2(t)\,dt$ car f est impaire donc f^2 est paire

$V_{eff}^2 = \dfrac{1}{\pi} \times \displaystyle\int_{0}^{\pi} t^2\,dt$

$V_{eff}^2 = \dfrac{1}{\pi} \times \left[\dfrac{t^3}{3}\right]_0^{\pi}$

$V_{eff}^2 = \dfrac{1}{\pi} \times \dfrac{\pi^3}{3}$

$\boxed{V_{eff}^2 = \dfrac{\pi^2}{3}}$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_n et b_n

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$a_n = \dfrac{2}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt$ car f est une fonction 2π-périodique

Or f est impaire et cos est paire donc leur produit est impair.

L'intégrale sur un intervalle centré en 0 est nulle.

$\boxed{a_n = 0}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$a_n = \dfrac{2}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt$ car f est une fonction 2π-périodique

Or f est impaire et sin est impaire donc leur produit est pair.

Donc $b_n = \dfrac{2}{2\pi} \times 2 \times \displaystyle\int_{0}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt$

Intégrons $\displaystyle\int_{0}^{\pi} t\sin nt\,dt$ par parties

On pose $u(t) = t$ et $v'(t) = \sin nt$

On calcule $u'(t) = 1$ et $v(t) = \dfrac{-\cos nt}{n}$

On obtient : $\displaystyle\int_{0}^{\pi} t\sin nt dt = \left[t \times \dfrac{-\cos nt}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 1 \times \dfrac{-\cos nt}{n}\,dt$

donc $\displaystyle\int_{0}^{\pi} t\sin nt dt = \left(\pi \times \dfrac{-\cos n\pi}{n} - 0\right) + \dfrac{1}{n}\int_0^{\pi} \cos nt\,dt$

puis $\displaystyle\int_{0}^{\pi} t\sin nt dt = \dfrac{\pi(-(-1)^n)}{n} + \dfrac{1}{n}\left[\dfrac{\sin nt}{n}\right]_0^{\pi}$

puis $\displaystyle\int_{0}^{\pi} t\sin nt dt = \dfrac{\pi((-1)^{n+1}}{n} + 0 - 0$

Donc $b_n = \dfrac{2}{2\pi} \times 2 \times \dfrac{\pi(-1)^{n+1}}{n}$

C'est à dire $\boxed{b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}}$

4. Expliciter $S_5(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{5} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$

n	0	1	2	3	4	5
a_n	$\frac{\pi}{2}$	0	0	0	0	0
b_n	$\emptyset$	2	-1	$\frac{2}{3}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{2}{5}$

donc $\boxed{S_5(t) = 2\sin t - \sin(2t) + \frac{1}{3}\sin(3t) - \frac{1}{2}\sin 4t + \frac{2}{5}\sin(5t)}$

Le graphe est alors le suivant :