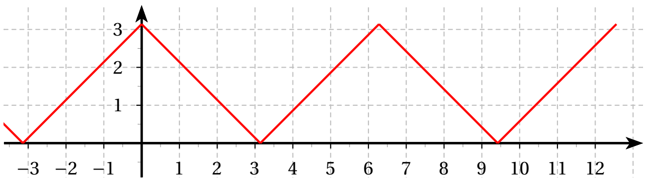
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=\pi-t$ sur $[0;\pi]$, paire, 2π-périodique.

1. Dessiner f sur au moins deux périodes



2. Calculer a_0 et V_{eff}^2

$a_0=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)\,dt$

$a_0=\dfrac{1}{2\pi}\times 2\times\displaystyle\int_{0}^{+\pi} f(t)\,dt$

$a_0=\dfrac{1}{\pi}\times\displaystyle\int_{0}^{+\pi} \pi-t\,dt$

$a_0=\dfrac{1}{\pi}\times\left[\pi t-\dfrac{t^2}{2}\right]_0^{+\pi}$

$a_0=\dfrac{1}{\pi}\times\dfrac{\pi^2}{2}$

donc $\boxed{a_0=\dfrac{\pi}{2}}$

$V_{eff}^2=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\,dt$ car f^2 est 2π-périodique

$V_{eff}^2=\dfrac{1}{2\pi}\times 2\times\displaystyle\int_{0}^{\pi} f^2(t)\,dt$ car f est paire donc f^2 est aussi

$V_{eff}^2=\dfrac{1}{\pi}\times\displaystyle\int_{0}^{\pi} (\pi-t)^2\,dt$

$V_{eff}^2=\dfrac{1}{\pi}\times\displaystyle\int_{0}^{\pi} \pi^2-2\pi t+t^2\,dt$

$V_{eff}^2=\dfrac{1}{\pi}\times\left[\pi^2 t-\pi t^2+\dfrac{t^3}{3}\right]_0^{\pi}$

$V_{eff}^2=\dfrac{1}{\pi}\times\dfrac{\pi^3}{3}$

$\boxed{V_{eff}^2=\dfrac{\pi^2}{3}}$

3. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, calculer pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, a_n et b_n

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$a_n=\dfrac{2}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt$ car f est une fonction 2π-périodique

Or f est paire et cos est paire donc leur produit est pair.

donc $a_n=\dfrac{2}{2\pi}\times 2\times\displaystyle\int_{0}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt$

puis $a_n=\dfrac{2}{2\pi}\times 2\times\displaystyle\int_{0}^{\pi} \pi-t\cos nt\,dt$

Intégrons $\displaystyle\int_{0}^{\pi}(\pi-t)\cos nt\,dt$ par parties

On pose $u(t)=\pi-t$ et $v'(t)=\cos nt$

On calcule $u'(t)=-1$ et $v(t)=\dfrac{\sin nt}{n}$

On obtient : $\displaystyle\int_{0}^{\pi}(\pi-t)\cos nt\,dt=\left[(\pi-t)\times\dfrac{\sin nt}{n}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}-1\times\dfrac{\sin nt}{n}\,dt$

donc $\displaystyle\int_{0}^{\pi}(\pi-t)\cos nt\,dt=0-0+\dfrac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nt\,dt$

puis $\displaystyle\int_{0}^{\pi}(\pi-t)\cos nt\,dt=\dfrac{1}{n}\left[\dfrac{-\cos nt}{n}\right]_0^{\pi}$

puis $\displaystyle\int_{0}^{\pi}(\pi-t)\cos nt\,dt=-\dfrac{1}{n^2}(-\cos(n\pi)+1)$

donc $\displaystyle\int_{0}^{\pi}t\cos nt\,dt=-\dfrac{1}{n^2}\left(1-(-1)^n\right)$

Donc $a_n=\dfrac{2}{2\pi}\times 2\times\displaystyle\int_{0}^{\pi}(\pi-t)\cos nt\,dt=\dfrac{2}{\pi}\times-\dfrac{1}{n^2}\left(1-(-1)^n\right)$

$\boxed{a_n=\dfrac{2(1-(-1)^n)}{n^2\pi}}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin ntdt$ car f est une fonction 2π-périodique

Or f est paire et sin est impaire donc leur produit est impair.

L'intégrale sur un intervalle centré en 0 est donc nulle. On donc $\boxed{b_n = 0}$

4. Expliciter $S_5(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{5} a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$

n	0	1	2	3	4	5
a_n	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{4}{\pi}$	0	$\frac{4}{9\pi}$	0	$\frac{4}{25\pi}$
b_n	$\emptyset$	0	0	0	0	0

donc $\boxed{S_5(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\cos(t) + \frac{4}{9\pi}\cos(3t) + \frac{4}{25\pi}\cos(5t)}$

Le graphe est alors le suivant :