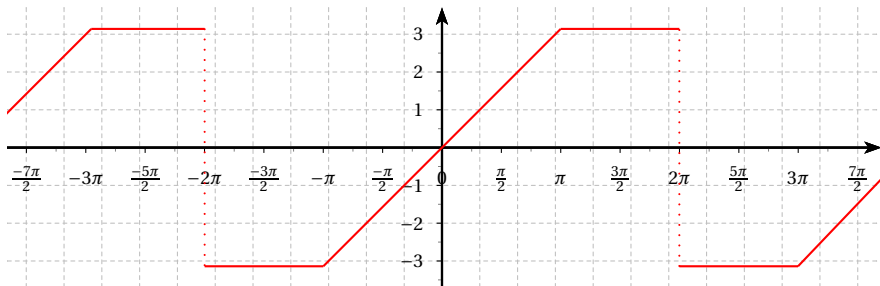


Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(t) = 1$  sur  $[0; \frac{\pi}{2}[$ ,  $f(t) = \frac{\pi}{2}$  sur  $[\frac{\pi}{2}; \pi[$ ;  $f$  est impaire et  $2\pi$ -périodique

1. Dessiner  $f$  sur au moins deux périodes



2. Calculer  $a_0$  et  $V_{eff}^2$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(t) dt$$

or  $f$  est impaire

donc  $a_0 = 0$

$$V_{eff}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f^2(t) dt \quad \text{car } f^2 \text{ est } 2\pi\text{-périodique}$$

$$V_{eff}^2 = \frac{1}{2\pi} \times 2 \times \int_0^{\pi} f^2(t) dt \quad \text{car } f^2 \text{ est paire}$$

$$V_{eff}^2 = \frac{1}{\pi} \times \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} f^2(t) dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f^2(t) dt \right) \quad \text{d'après la relation de Chasles}$$

$$V_{eff}^2 = \frac{1}{\pi} \times \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 dt \right) \quad \text{car } f(t) = \begin{cases} t & \text{sur } [0; \frac{\pi}{2}] \\ \frac{\pi}{2} & \text{sur } [\frac{\pi}{2}; \pi] \end{cases}$$

$$V_{eff}^2 = \frac{1}{\pi} \times \left( \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \times [t]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right)$$

$$V_{eff}^2 = \frac{1}{\pi} \times \left( \left( \frac{\pi^3}{24} - 0 \right) + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \times \left( \pi - \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

$$V_{eff}^2 = \frac{1}{\pi} \times \left( \frac{\pi^3}{24} + \left(\frac{\pi^3}{8}\right) \right)$$

$$V_{eff}^2 = \frac{1}{\pi} \times \frac{\pi^3}{6}$$

$$V_{eff}^2 = \frac{\pi^2}{6}$$

3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , calculer pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_n$  et  $b_n$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$a_n = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ntdt \quad \text{car } f \text{ est une fonction } 2\pi\text{-périodique}$$

or  $f$  est impaire et  $\cos$  est paire donc le produit  $f \times \cos$  est une fonction impaire.

donc  $a_n = 0$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :

$$b_n = \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ntdt \quad \text{car } f \text{ est une fonction } 2\pi\text{-périodique}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \times 2 \times \int_0^{\pi} f(t) \sin ntdt \quad \text{car la fonction } f \times \sin \text{ est paire}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \times \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) \sin ntdt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(t) \sin ntdt \right) \quad \text{d'après la relation de Chasles}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \times \left( \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin ntdt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\pi}{2} \sin ntdt \right) \quad \text{car } f(t) = \begin{cases} t & \text{sur } [0; \frac{\pi}{2}] \\ \frac{\pi}{2} & \text{sur } [\frac{\pi}{2}; \pi] \end{cases}$$

Intégrons par parties

on pose  $u(t) = t$  et  $v'(t) = \sin(nt)$

On calcule  $u(t) = t$  et  $v(t) = \frac{-\cos(nt)}{n}$

On obtient :

$$b_n = \frac{2}{\pi} \times \left( \left[ t \times \frac{-\cos nt}{n} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos nt}{n} dt + \frac{\pi}{2} \times \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin ntdt \right) \text{ car } f(t) = \begin{cases} t & \text{sur } [0; \frac{\pi}{2}] \\ \frac{\pi}{2} & \text{sur } [\frac{\pi}{2}; \pi] \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \times \left( \left( \frac{-\pi \cos n \frac{\pi}{2}}{2n} - 0 \right) - \left[ \frac{-\sin nt}{n^2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2} \times \left[ \frac{-\cos nt}{n} \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \times \left( \frac{-\pi \cos n \frac{\pi}{2}}{2n} - \frac{-\sin n \frac{\pi}{2}}{n^2} + \frac{\pi}{2} \times \frac{-(-1)^n + \cos n \frac{\pi}{2}}{n} \right)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \times \left( \frac{-\pi \cos n \frac{\pi}{2}}{2n} + \frac{\sin n \frac{\pi}{2}}{n^2} - \frac{\pi}{2} \times \frac{(-1)^n}{n} + \frac{\pi}{2} \times \frac{\cos n \frac{\pi}{2}}{n} \right)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \times \left( \frac{\sin n \frac{\pi}{2}}{n^2} - \frac{\pi}{2} \times \frac{(-1)^n}{n} \right)$$

$$b_n = \frac{2 \sin n \frac{\pi}{2}}{n^2 \pi} - \frac{(-1)^n}{n}$$

Si  $n$  est pair alors  $n = 2p$  et  $a_n = a_{2p} = \frac{2 \sin p\pi}{(2p)^2 \pi} - \frac{(-1)^{2p}}{2p} = 0 - \frac{1}{2p} = -\frac{1}{n}$

Si  $n$  est impair alors  $n = 2p + 1$  et

$$a_n = a_{2p+1} = \frac{2 \sin p\pi + \frac{\pi}{2}}{(2p+1)^2 \pi} - \frac{(-1)^{2p+1}}{2p+1} = \frac{2(-1)^p}{(2p+1)^2 \pi} + \frac{1}{2p+1} = \frac{2(-1)^p}{(2p+1)^2 \pi} + \frac{1}{2p+1}$$

4. Expliciter  $S_5(t) = a_0 + \sum_{n=1}^5 a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$

$n$	0	1	2	3	4	5
$a_n$	0	0	0	0	0	0
$b_n$	$\emptyset$	$\frac{2}{\pi} + 1$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{-2}{9\pi} + \frac{1}{3}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{2}{25\pi} + \frac{1}{5}$

donc  $S_5(t) = \left( \frac{2}{\pi} + 1 \right) \sin t - \frac{1}{2} \sin(2t) + \left( \frac{-2}{9\pi} + \frac{1}{3} \right) \sin(3t) - \frac{1}{4} \sin(4t) + \left( \frac{2}{25\pi} + \frac{1}{5} \right) \sin(5t)$

Le graphe est alors le suivant :

