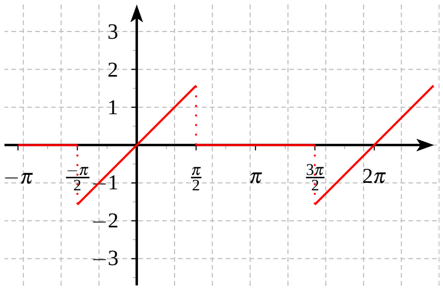
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = t$ sur $[0;\frac{\pi}{2}[$, $\quad f(t) = 0$ sur $[\frac{\pi}{2};\pi]$; f est impaire et 2π-périodique

1. Dessiner f sur au moins deux périodes



2. Calculer a_0 et V_{eff}^2

$a_0 = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{+\pi} f(t)dt$ or f est impaire donc $\boxed{a_0 = 0}$

$$V_{eff}^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} f^2(t)dt \qquad \text{car } f^2 \text{ est } 2\pi\text{-périodique}$$

$$V_{eff}^2 = \frac{1}{2\pi}\times 2\times\int_{0}^{\pi} f^2(t)dt \qquad \text{car } f^2 \text{ est paire}$$

$$V_{eff}^2 = \frac{1}{\pi}\times\left(\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f^2(t)dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f^2(t)dt\right) \qquad \text{d'après la relation de Chasles}$$

$$V_{eff}^2 = \frac{1}{\pi}\times\left(\int_{0}^{\frac{\pi}{2}\pi} t^2dt + 0\right) \quad \text{car } f(t) = \begin{cases} t & \text{sur } [0;\frac{\pi}{2}] \\ 0 & \text{sur } [\frac{\pi}{2};\pi] \end{cases}$$

$$V_{eff}^2 = \frac{1}{\pi}\times\left(\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\times\left(\left(\frac{\pi^3}{24} - 0\right)\right) = \boxed{\frac{\pi^2}{24}}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_n et b_n

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$a_n = \dfrac{2}{2\pi}\displaystyle\int_{\pi}^{\pi} f(t)\cos nt dt$ car f est une fonction 2π-périodique or f est impaire donc le produit $f \times \sin$ aussi donc $a_n = \boxed{a_n = 0}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt dt \text{ car } f \text{ est une fonction } 2\pi\text{-périodique}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\times 2\times\int_{0}^{\pi} f(t)\sin nt dt \text{ car la fonction } f\times\sin \text{ est paire}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\times\left(\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin nt dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(t)\sin nt dt\right) \qquad \text{d'après la relation de Chasles}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\times\left(\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} t\sin nt dt + 0\right) \text{ car } f(t) = \begin{cases} t & \text{sur } [0;\frac{\pi}{2}] \\ 0 & \text{sur } [\frac{\pi}{2};\pi] \end{cases}$$

Intégrons par parties

on pose $u(t) = t \qquad$ et $\qquad v'(t) = \sin(nt)$

On calcule $u'(t) = 1 \qquad$ et $\qquad v(t) = \dfrac{-\cos(nt)}{n}$

On obtient :

$$b_n = \frac{2}{\pi}\times\left(\left[t\times\frac{-\cos nt}{n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos nt}{n}dt\right)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \times \left(\left(\frac{-\pi \cos n\frac{\pi}{2}}{2n} - 0 \right) - \left[\frac{-\sin nt}{n^2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \right)$$
$$b_n = \frac{2}{\pi} \times \left(\frac{-\pi \cos n\frac{\pi}{2}}{2n} - \frac{-\sin n\frac{\pi}{2}}{n^2} \right)$$
$$b_n = \frac{2}{\pi} \times \left(\frac{-\pi \cos n\frac{\pi}{2}}{2n} + \frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n^2} \right)$$
$$\boxed{b_n = \frac{-\cos n\frac{\pi}{2}}{n} + \frac{2 \sin n\frac{\pi}{2}}{n^2 \pi}}$$

4. Déterminer le nombre minimal N d'harmoniques à ajouter pour que le carré de la valeur efficace de S_N approche celui de f à 90% près.
On calcule les b_n puis les b_n^2

On définit S_N par $S_N(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$ donc ici : $S_N(t) = \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(nt)$

Par ailleurs la formule de Parseval appliquée à $S_N$donne $W_{eff}^2 = a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} a_n^2 + b_n^2$ donc ici $W_{eff}^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N} b_n^2$

On a déjà calculé $V_{eff}^2 = \frac{\pi^2}{24}$ donc $\frac{W_{eff}^2}{V_{eff}^2}$ sera la moitié de la somme cumulée des b_n^2 divisée par ce nombre.

Cela donne :

n	0	1	2	3	4	5	6	7
a_n	0	0	0	0	0	0	0	0
b_n	$\emptyset$	$\frac{2}{\pi}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-2}{9\pi}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{2}{25\pi}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{-2}{49\pi}$
b_n^2 à 10^{-3} près	Vide	0,405	0,025	0,005	0,063	0,001	0,028	0,000
$\frac{W_{eff}^2}{V_{eff}^2}$	Vide	0,493	0,900	0,803	0,879	0,880	0,913	0,914

donc $\boxed{S_6(t) = \frac{2}{\pi} \sin t + \frac{1}{2} \sin(2t) - \frac{2}{9\pi} \sin(3t) - \frac{1}{4} \sin(4t) + \frac{2}{25\pi} \sin(5t) - \frac{2}{49\pi} \sin(6t)}$

Le graphe est alors le suivant :