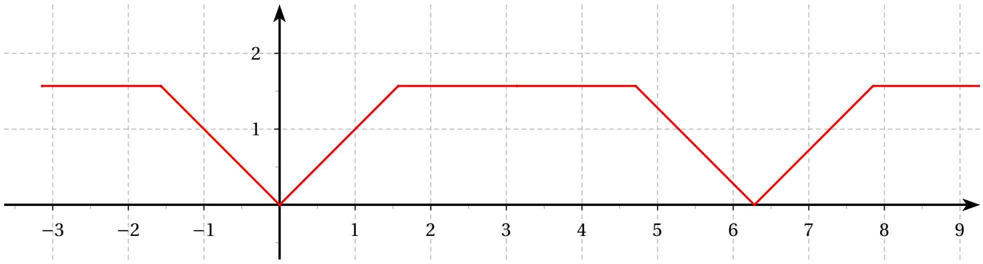
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t)=t$ sur $[0;\frac{\pi}{2}[$, $\quad f(t)=\frac{\pi}{2}$ sur $[\frac{\pi}{2};\pi]$; f est paire ; f est 2π-périodique

1. Dessiner f sur au moins deux périodes



2. Calculer a_0 et V^2_{eff}

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f(t)dt \qquad V^2_{eff}=\frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}f^2(t)dt \quad \text{car } f^2 \text{ est } 2\pi\text{-périodique}$$

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\times2\times\int_{0}^{+\pi}f(t)dt \qquad V^2_{eff}=\frac{2}{2\pi}\times2\times\int_{0}^{+\pi}f^2(t)dt \quad \text{car } f^2 \text{ est paire}$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\times\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(t)dt\right) \qquad V^2_{eff}=\frac{2}{\pi}\times\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}f^2(t)dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f^2(t)dt\right) \quad \text{d'après la relation de Chasles}$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\times\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\,dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\pi}{2}dt\right) \qquad V^2_{eff}=\frac{2}{\pi}\times\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2dt\right) \quad \text{car } f(t)=\begin{cases} t & \text{sur } [0;\frac{\pi}{2}] \\ \frac{\pi}{2} & \text{sur } [\frac{\pi}{2};\pi]\end{cases}$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\times\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\,dt+\frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}1\,dt\right) \qquad V^2_{eff}=\frac{2}{\pi}\times\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2dt+\frac{\pi^2}{4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}1\,dt\right)$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\times\left(\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\quad+\quad\frac{\pi}{2}[t]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) \qquad V^2_{eff}=\frac{2}{\pi}\times\left(\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\frac{\pi^2}{4}}\quad+\quad\frac{\pi^2}{4}[t]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\times\left(\left(\frac{\pi^2}{8}\right)-0\quad+\quad\frac{\pi}{2}(\pi-\frac{\pi}{2})\right) \qquad V^2_{eff}=\frac{2}{\pi}\times\left(\left(\frac{\pi^3}{24}\right)-0\quad+\quad\frac{\pi^2}{4}\left(\pi-\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\times\left(\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{2}\right) \qquad V^2_{eff}=\frac{2}{\pi}\times\left(\frac{\pi^3}{24}+\frac{\pi^3}{8}\right)$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\times\frac{3\pi^2}{8} \qquad V^2_{eff}=\frac{2}{\pi}\times\frac{\pi^3}{6}$$

$$\boxed{a_0=\frac{3\pi}{8}} \qquad \boxed{V^2_{eff}=\frac{\pi^2}{3}}$$

3. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, calculer pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, a_n et b_n

Puisque la fonction est paire, les coefficients b_n sont nuls

$a_n=\frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\,dt$ car f est une fonction 2π-périodique

$a_n=\frac{2}{2\pi}\times2\times\int_{0}^{\pi}f(t)\cos nt\,dt$ car f est une fonction paire

$a_n=\frac{2}{2\pi}\times2\times\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\cos nt\,dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(t)\cos nt\,dt\right)$ d'après le relation de Chasles

$a_n=\frac{2}{2\pi}\times2\times\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos nt\,dt+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\pi}{2}\cos nt\,dt\right)$ car $f(t)$ sur $[0;\frac{\pi}{2}]$ et $f(t)=\frac{\pi}{2}$ sur $[\frac{\pi}{2};\pi]$

Intégrons $\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos nt\,dt$ par parties

On pose $u(t)=t$ et $v'(t)=\cos nt$

On calcule $u'(t)=1$ et $v(t)=\frac{\sin nt}{n}$

On obtient : $\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\cos nt\,dt=\left[t\times\frac{\sin nt}{n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\quad-\quad\int_0^{\frac{\pi}{2}}1\times\frac{\sin nt}{n}dt$

donc $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos nt\,dt = \left(\frac{\pi}{2}\times\frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n} \quad - \quad 0\right) \quad - \quad \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin nt\,dt$

puis $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos nt\,dt = \frac{\pi}{2n}\times\sin n\frac{\pi}{2} \quad - \quad \frac{1}{n}\left[\frac{-\cos nt}{n}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

puis $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos nt\,dt = \frac{\pi}{2n}\times\sin n\frac{\pi}{2} \quad - \quad \frac{1}{n}\left(\frac{-\cos n\frac{\pi}{2}+1}{n}\right)$

donc $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos nt\,dt = \frac{\pi}{2n}\times\sin n\frac{\pi}{2} \quad - \quad \frac{1}{n^2}\left(1-\cos n\frac{\pi}{2}\right)$

Le calcul du coefficient devient alors

$\displaystyle a_n = \frac{2}{\pi}\times\left(\frac{\pi}{2n}\times\sin n\frac{\pi}{2} \quad - \quad \frac{1}{n^2}\left(1-\cos n\frac{\pi}{2}\right) \quad + \quad \frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos nt\,dt\right)$

C'est à dire $\displaystyle a_n = \frac{2}{\pi}\times\left(\frac{\pi}{2n}\times\sin n\frac{\pi}{2} \quad - \quad \frac{1}{n^2}\left(1-\cos n\frac{\pi}{2}\right) \quad + \quad \frac{\pi}{2}\left[\frac{\sin nt}{n}dt\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right)$

$\displaystyle a_n = \frac{2}{\pi}\times\left(\frac{\pi}{2n}\times\sin n\frac{\pi}{2} \quad - \quad \frac{1}{n^2}\left(1-\cos n\frac{\pi}{2}\right) \quad + \quad \frac{\pi}{2n}\left(0-\sin n\frac{\pi}{2}\right)\right)$

Et en simplifiant :

$\displaystyle a_n = \frac{2}{\pi}\times\left(\underline{\frac{\pi}{2n}\times\sin n\frac{\pi}{2}} \quad - \quad \frac{1}{n^2}\left(1-\cos n\frac{\pi}{2}\right) \quad - \quad \underline{\frac{\pi}{2n}\sin n\frac{\pi}{2}}\right)$

On obtient finalement $\displaystyle a_n = \frac{2}{\pi}\times\left(\frac{1}{n^2}\left(\cos n\frac{\pi}{2}-1\right)\right)$

$$\boxed{a_n = \frac{2}{\pi n^2}\left(\cos n\frac{\pi}{2}-1\right)}$$

4. Expliciter $S_5(t) = a_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{5} a_n\cos n\omega t + b_n\sin n\omega t$

n	0	1	2	3	4	5
a_n	$\frac{3\pi}{8}$	$-\frac{2}{\pi}$	$-\frac{1}{\pi}$	$-\frac{2}{9\pi}$	0	$-\frac{2}{25\pi}$
b_n	$\varnothing$	0	0	0	0	0

donc $\boxed{S_5(t) = \frac{3\pi}{8} - \frac{2}{\pi}\cos t - \frac{1}{\pi}\cos(2t) - \frac{2}{9\pi}\cos(3t) - \frac{2}{25\pi}\cos(5t)}$

Le graphe des deux fonction f et S_5 donne :