Partie A

1. $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t\cos(2t)\,\mathrm{d}t$

   On pose : $u(t) = 2t$ et $v'(t) = \cos(2t)$

   On calcule $u'(t) = 2$ et $v(t) = \dfrac{\sin 2t}{2}$

   On obtient : $J = \left[2t\dfrac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t\dfrac{\sin 2t}{2}\,\mathrm{d}t$

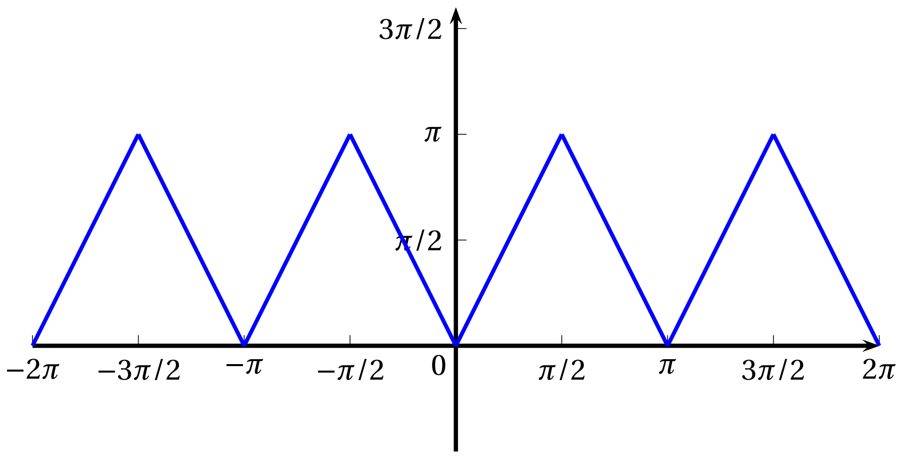
   C'est à dire : $J = [t\sin 2t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\,\mathrm{d}t$

   Puis $J = 0 - 0 - \left[\dfrac{-\cos 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\dfrac{1-(-1)}{2} = -1$

2. $I(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t\cos(2t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{(-1)^1 - 1}{2\times 1^2} = -1$. Or $J = I(1)$ dont le résultat obtenu précédemment est cohérent.

Partie B

1. Figure 1 de l'annexe 2



   a. Déterminer graphiquement la parité de la fonction f.

   Le graphe de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées donc la fonction est paire.

   b. En déduire b_n pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 1.

   f est paire, sin est impaire donc le produit est impaire. Le graphe du produit est donc symétrique par rapport à l'origine 0 du repère. L'intégrale de f sur un intervalle centré en 0 est nulle donc tous les b_n sont nuls.

2. **a.** Déterminer a_0.

   $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\,\mathrm{d}t$ car f est paire

   donc $a_0 = \dfrac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t\,\mathrm{d}t = \dfrac{2}{\pi}\left[t^2\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\pi}{2}$

   b. $a_n = \dfrac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos 2nt\,\mathrm{d}t = \dfrac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos 2nt\,\mathrm{d}t$ car f est paire

   donc $a_n = \dfrac{4}{\pi}I_n = \dfrac{2\left[(-1)^n - 1\right]}{\pi n^2}$

3. **a.** Compléter le tableau 1 de l'annexe 2 avec des valeurs approchées à 10^{-5} près.

n	1	2	3	4	5	6
a_n exacte	$\frac{-4}{\pi}$	0	$\frac{-4}{9\pi}$	0	$\frac{-4}{25\pi}$	0
$\dfrac{a_n^2+b_n^2}{2}$ à 10^{-5} près	0,81057	0	0,01001	0	0,00130	0

b. On a : $P_5 = a_0^2 + \sum_{n=1}^{5} \dfrac{a_n^2+b_n^2}{2}$ or en utilisant les résultats du tableau 1 on obtient qu'une valeur approchée à 10^{-4} près est 3,289 3

c. Il suffit de prendre $n = 3$ pour que $\dfrac{P_3}{V_{eff}^2} \approx 0,999425 > 0,999$