Partie A

1. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, la valeur exacte de l'intégrale :

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t\cos(2t)\,\mathrm{d}t.$$

2. Pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 1, on considère l'intégrale :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2t\cos(2nt)\,\mathrm{d}t.$$

On admet que : $I_n = \dfrac{(-1)^n - 1}{2n^2}$.
Vérifier, à l'aide de cette formule, le résultat obtenu à la question 1.

Partie B

On considère la fonction f, périodique de période π, définie sur l'ensemble des nombres réels par :

$$\begin{cases} f(t) = 2t & \text{si } 0 \leqslant t < \dfrac{\pi}{2} \\ f(t) = -2t + 2\pi & \text{si } \dfrac{\pi}{2} \leqslant t < \pi. \end{cases}$$

1. Sur la figure 1 de l'annexe 2, tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi\ ;\ 2\pi]$.
Les coefficients du développement de Fourier de la fonction f sont notés a_0, a_n et b_n où n désigne un nombre entier supérieur ou égal à 1.
   a. Déterminer graphiquement la parité de la fonction f.
   b. En déduire b_n pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 1.
2. **a.** Déterminer a_0.
   b. Montrer, en vous aidant de la partie A, que pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 1 :

$$a_n = \frac{2\left[(-1)^n - 1\right]}{\pi n^2}.$$

3. **a.** Compléter le tableau 1 de l'annexe 2 avec des valeurs approchées à 10^{-5} près.
   b. On considère un nombre entier k supérieur ou égal à 1 et on pose :

$$P_k = a_0^2 + \sum_{n=1}^{k} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}.$$

   En utilisant les résultats du tableau 1, justifier qu'une valeur approchée de P_5 à 10^{-4} près est 3,289 3.
   c. On note f_{eff}^2 le carré de la valeur efficace de la fonction f sur une période.
   On admet que $f_{\text{eff}}^2 = \dfrac{\pi^2}{3}$.
   À l'aide du tableau 1 et de la calculatrice, déterminer la plus petite valeur de k telle que :

$$\frac{P_k}{f_{\text{eff}}^2} > 0,999.$$

Annexe 2

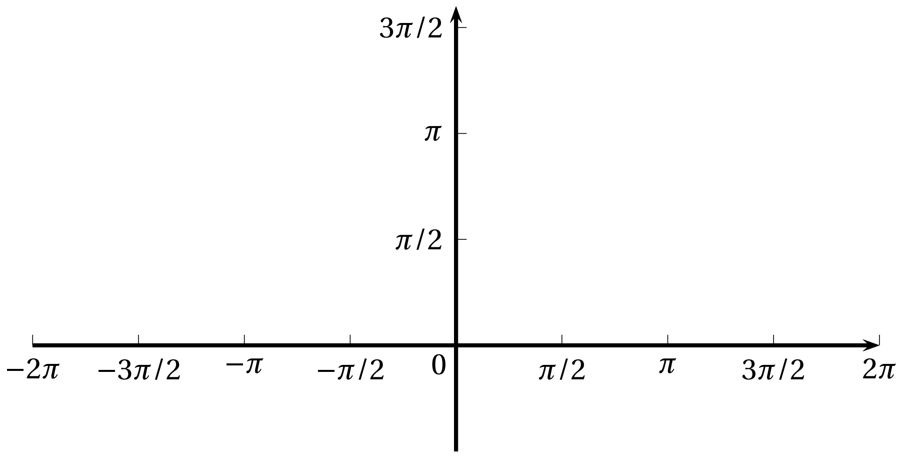

Figure 1 : représentation graphique de la fonction f (à compléter)

n	1	2	3	4	5	6
a_n exacte						
$\dfrac{a_n^2+b_n^2}{2}$ à 10^{-5} près						

Tableau 1 (à compléter)