

1. On a obtenu à l'aide d'une calculatrice :

$$\int_0^{\pi} \sin t \cdot \cos t \, dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^{\pi} \sin t \cdot \cos(2t) \, dt = -\frac{2}{3}.$$

Justifier ces deux résultats en calculant les intégrales.

On dispose de la formule de trigonométrie : $\sin(2t) = 2 \sin t \cos t$

$$\text{donc } \int_0^{\pi} \sin t \cdot \cos t \, dt = \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \sin(2t) \, dt = \left[\frac{\sin(2t)}{4} \right]_0^{\pi} = 0 - 0 = 0$$

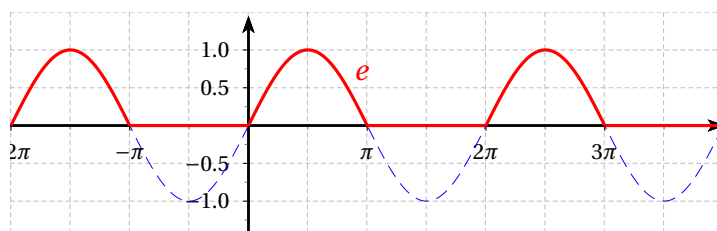
De plus $\cos(2t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$ donc $\cos(2t) = 2 \cos^2(t) - 1$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } \int_0^{\pi} \sin t \cdot \cos(2t) \, dt &= \int_0^{\pi} 2 \cos^2(t) \sin(t) - \sin(t) \, dt \\ &= \left[\frac{-2}{3} \cos^3(t) + \cos(t) \right]_0^{\pi} = \frac{-2}{3}(-1-1) - \frac{-2}{3}(0) - 1 - 1 = \frac{4}{3} - 2 = \frac{-2}{3} \end{aligned}$$

2. On considère le signal, modélisé par la fonction réelle e , de période 2π , définie par :

$$\begin{cases} e(t) = \sin t & \text{si } t \in [0; \pi] \\ e(t) = 0 & \text{si } t \in]\pi; 2\pi[. \end{cases}$$

a. Dans un repère orthogonal, tracer la représentation graphique de la fonction e pour t variant dans l'intervalle $[-2\pi; 4\pi]$.



b. Calculer les coefficients de Fourier a_0 , a_1 et a_2 de la fonction e . On admettra dans la suite de l'exercice que les coefficients b_1 et b_2 valent : $b_1 = \frac{1}{2}$ et $b_2 = 0$.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin(t) \, dt \quad \text{car } f \text{ est nulle sur }]\pi; 2\pi[\text{ et } 2\pi\text{-périodique.}$$

$$\text{donc } a_0 = \frac{1}{2\pi} [-\cos(t)]_0^{\pi} = \frac{1 - (-1)}{2\pi} = \frac{1}{\pi}$$

$$\text{Puis } a_1 = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} \cos(t) \sin(t) \, dt = \frac{2}{2\pi} \times 0 = 0$$

$$\text{Enfin } a_2 = \frac{2}{2\pi} \int_0^{\pi} \cos(2t) \sin(t) \, dt = \frac{2}{2\pi} \times \frac{-2}{3} = \frac{-2}{3\pi}$$

3. a. Calculer le carré E^2 de la valeur efficace du signal e .

On a : $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$ donc $1 - 2\sin^2(x) = \cos(2x)$

et finalement $\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$

$$E^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \sin^2(x) dx = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi 1 - \cos(2x) dx$$

$$\text{C'est à dire : } E^2 = \frac{1}{4\pi} \left[x - \frac{\sin(2x)}{2} \right]_0^\pi = \frac{1}{4}$$

- b. On sait par ailleurs que la formule de Bessel-Parseval donne :

$$E^2 = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}.$$

Dans le cas présent, on décide de ne garder que les harmoniques de rang 1 et 2.

Soit P le nombre défini par : $P = a_0^2 + \frac{1}{2} (a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2)$.

Calculer P , puis donner une approximation décimale à 10^{-3} près du rapport $\frac{P}{E^2}$.

$$\text{On a : } P = \frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{2} \times \left(0^2 + \frac{1}{4} + \frac{4}{9\pi^2} + 0^2 \right)$$

La calculatrice donne : $P^2 \approx 0,249$ donc $\frac{P}{E^2} \approx 0,995$

La comparaison de E^2 et P justifie que, dans la pratique, on néglige les harmoniques de rang supérieur ou égal à 3.