

1. On a obtenu à l'aide d'une calculatrice :

$$\int_0^{\pi} \sin t \cdot \cos t \, dt = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^{\pi} \sin t \cdot \cos(2t) \, dt = -\frac{2}{3}.$$

Justifier ces deux résultats en calculant les intégrales.

2. On considère le signal, modélisé par la fonction réelle  $e$ , de période  $2\pi$ , définie par :

$$\begin{cases} e(t) = \sin t & \text{si } t \in [0; \pi] \\ e(t) = 0 & \text{si } t \in ]\pi; 2\pi[. \end{cases}$$

a. Dans un repère orthogonal, tracer la représentation graphique de la fonction  $e$  pour  $t$  variant dans l'intervalle  $[-2\pi; 4\pi]$ .

b. Calculer les coefficients de Fourier  $a_0$ ,  $a_1$  et  $a_2$  de la fonction  $e$ . On admettra dans la suite de l'exercice que les coefficients  $b_1$  et  $b_2$  valent :  $b_1 = \frac{1}{2}$  et  $b_2 = 0$ .

3. a. Calculer le carré  $E^2$  de la valeur efficace du signal  $e$ .

b. On sait par ailleurs que la formule de Bessel-Parseval donne :

$$E^2 = a_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n^2 + b_n^2}{2}.$$

Dans le cas présent, on décide de ne garder que les harmoniques de rang 1 et 2.

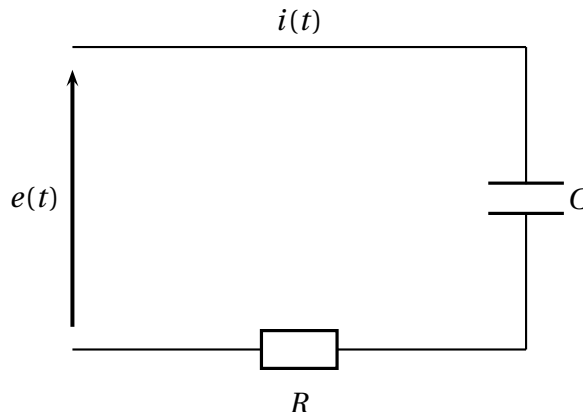
Soit  $P$  le nombre défini par :  $P = a_0^2 + \frac{1}{2}(a_1^2 + b_1^2 + a_2^2 + b_2^2)$ .

Calculer  $P$ , puis donner une approximation décimale à  $10^{-3}$  près du rapport  $\frac{P}{E^2}$ .

*La comparaison de  $E^2$  et  $P$  justifie que, dans la pratique, on néglige les harmoniques de rang supérieur ou égal à 3.*

## Partie B

On se propose dans cette partie d'obtenir l'intensité  $i$  du courant dans le circuit ci-dessous lorsqu'il est alimenté par le signal d'entrée  $e$  défini dans la partie A.



L'équation permettant de trouver l'intensité du courant est, pour  $t \in [0; +\infty[$ ,

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(u) \, du = e(t) \quad (1).$$

Pour déterminer la fonction  $i$  on remplace le signal d'entrée  $e$  par son développement en série de Fourier tronqué à l'ordre 2. L'équation (1) devient alors :

$$Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(u) \, du = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin t - \frac{2}{3\pi} \cos(2t) \quad (2).$$

On admet que l'intensité  $i$  du courant est une fonction dérivable sur  $[0; +\infty[$ .

On suppose dans toute la suite de l'exercice que  $R = 5\,000\Omega$  et  $C = 10^{-4} \text{ F}$

1. Montrer que l'équation (2) peut alors se transformer et s'écrire :

$$\begin{cases} \frac{di}{dt}(t) + 2i(t) = (10^{-4}) \cos t + \left(\frac{4}{15\pi} \cdot 10^{-3}\right) \sin(2t) \\ t \in [0; +\infty[ \end{cases} \quad (3).$$

2. Vérifier que la fonction  $i_1$  telle que  $i_1(t) = (4 \cdot 10^{-5}) \cos t + (2 \cdot 10^{-5}) \sin t$  est une solution particulière de l'équation différentielle

$$\begin{cases} \frac{di}{dt}(t) + 2i(t) = (10^{-4}) \cos t \\ t \in [0; +\infty[ \end{cases}$$

3. Déterminer une solution particulière  $i_2$  de l'équation différentielle

$$\begin{cases} \frac{di}{dt}(t) + 2i(t) = \left(\frac{4}{15\pi} \cdot 10^{-3}\right) \sin(2t) \\ t \in [0; +\infty[ \end{cases}$$

4. Résoudre alors l'équation différentielle (3). En déduire la solution particulière vérifiant la condition  $i(0) = 0$ .