EXERCICE 1 Calculer les transformées des fonctions suivantes :

- $f_1(t) = U(t-3)$ donc $F_1(t) = \frac{1}{p}e^{-3p}$
- $f_2(t) = 4\ U(t-2)$ donc $F_2(t) = \frac{4}{p}e^{-2p}$
- $f_3(t) = (t-1)\ U(t-1)$ donc $F_3(t) = \frac{1}{p^2}e^{-p}$
- $f_4(t) = t\ U(t) - (t-4)\ U(t-4)$ donc $F_4(t) = \frac{1}{p^2}\left(1-e^{-4p}\right)$
- $f_5(t) = \sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\ U\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$ donc $F_5(t) = \frac{1}{p^2+1}e^{-p\frac{\pi}{4}}$
- $f_6(t) = e^{-8(t-1)}\ U(t-1)$ donc $F_6(t) = \frac{1}{p+8}e^{-p}$
- $f_7(t) = t\ U(t-1) = (t-1+1)U(t-1) = (t-1)U(t-1) + U(t-1)$ donc $F_7(t) = \frac{1}{p^2}e^{-p} + \frac{1}{p}e^{-p}$

EXERCICE 2 Retrouver les originaux des transformées suivantes :

- $F_1(p) = \frac{1}{p^2}e^{-3p}$ donc $f_1(t) = (t-3)U(t-3)$
- $F_2(p) = \frac{1}{p}e^{-p/2}$ donc $f_2(t) = U\left(t-\frac{1}{2}\right)$
- $F_3(p) = \frac{1}{p}(1-e^{-p})$ donc $f_3(t) = U(t) - U(t-1)$
- $F_4(p) = \frac{2}{p^2}(1-2e^{-p}+e^{-2p})$ donc $f_4(t) = 2tU(t) \ - \ 4(t-1)U(t-1) \ + \ 2(t-2)U(t-2)$

EXERCICE 3 Utiliser la transformée de Laplace pour résoudre les problèmes différentiels suivants :

1. $y' + 3y = U(t) - U(t-1)$ sachant que $y(0) = 5$

$\boxed{\text{Étape}_1}$: on transforme

L'équation différentielle avec sa condition initiale devient : $pY - 5 \ + \ 3Y \ = \ \frac{1}{p} \ - \ \frac{1}{p}e^{-p}$

$\boxed{\text{Étape}_2}$: on isole Y

On a : $(p+3)Y \ = 5 + \frac{1}{p} \times \left(1-e^{-p}\right)$

Puis $Y = \frac{5}{p+3} + \frac{1}{p(p+3)} \times \left(1-e^{-p}\right)$

$\boxed{\text{Étape}_3}$: on décompose le terme $G(p) = \frac{1}{p(p+3)}$

$G(p) = \dfrac{1}{p(p+3)} = \dfrac{A}{p} + \dfrac{B}{p+3}$

$A = \lim\limits_{p\to 0} p \times G(p) = \dfrac{1}{3} = A + 0$

$B = \lim\limits_{p\to -3} (p+3) \times G(p) = -\dfrac{1}{3} = 0 + B$

Finalement : $G(p) = \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{p} \quad - \quad \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{p+3}$

Puis $Y = \dfrac{5}{p+3} + \left(\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{p} \quad - \quad \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{p+3}\right) \times \left(1 - e^{-p}\right)$

$\boxed{\text{Étape}_4}$: on reconnaît les originaux

$y(t) = 5e^{-3t}U(t) + \left(\dfrac{1}{3}U(t) - \dfrac{1}{3}e^{-3t}U(t)\right) - \left(\dfrac{1}{3}U(t-1) - \dfrac{1}{3}e^{-3(t-1)}U(t-1)\right)$

Simplifions cette expression suivant les intervalles où se trouve t

- Si $t < 0$ alors $U(t) = 0$ et $U(t-1) = 0$

  donc $y(t) = 0$

- Si $0 \leqslant t < 1$ alors $U(t) = 1$ mais $U(t-1) = 0$

  $y(t) = 5e^{-3t} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}e^{-3t}$

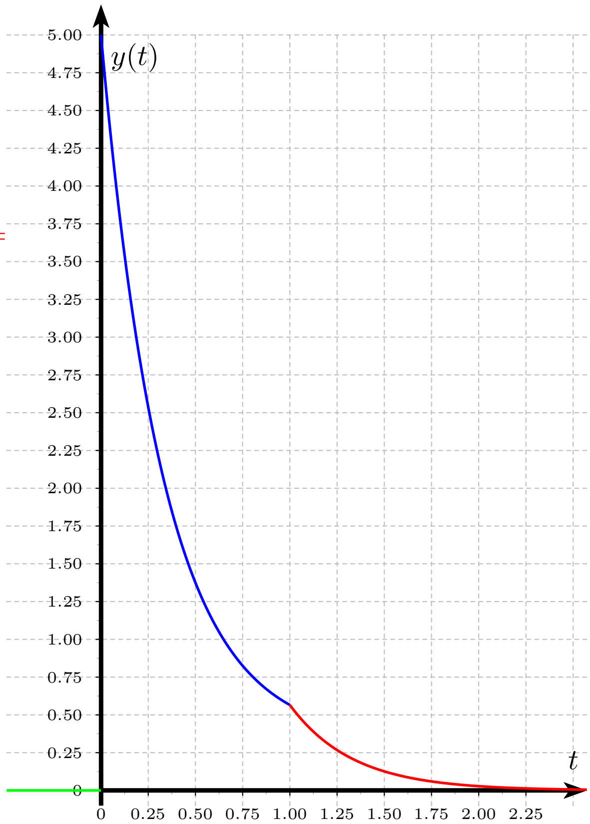
  donc $y(t) = \dfrac{14}{3}e^{-3t} + \frac{1}{3}$

- Si $t \geqslant 1$ alors $U(t) = 1$ et $U(t-1) = 1$

  $y(t) = 5e^{-3t} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3}e^{-3t} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}e^{-3t+3}$

  $y(t) = \dfrac{14}{3}e^{-3t} + \dfrac{1}{3}e^{-3t+3}$

  donc $y(t) = \dfrac{1}{3}e^{-3t}(14 + e^3)$



2. $y' + 2y = (t-1)U(t-1)$ sachant que $y(0) = 0$

$\boxed{\text{Étape}_1}$: on transforme

L'équation différentielle avec sa condition initiale devient : $pY - 0 \quad + \quad 2Y \quad = \dfrac{1}{p^2}e^{-p}$

$\boxed{\text{Étape}_2}$: on isole Y

On a : $(p+2)Y = \dfrac{1}{p^2} \times e^{-p}$

Puis $Y = \dfrac{1}{(p+2)p^2} \times e^{-p}$

$\boxed{\text{Étape}_3}$: on décompose le terme $G(p) = \dfrac{1}{p^2(p+2)}$

$G(p) = \dfrac{1}{p^2(p+2)} = \dfrac{A}{p^2} + \dfrac{B}{p} + \dfrac{C}{p+2}$

$A = \lim\limits_{p \to 0} p^2 \times G(p) = \dfrac{1}{2} = A + 0 + 0$

$C = \lim\limits_{p \to -2} (p+2) \times G(p) = \dfrac{1}{4} = 0 + 0 + C$

Pour B on calcule $\lim\limits_{p \to +\infty} p \times G(p) = 0 = 0 + B + C$ donc $B = -C = -\dfrac{1}{4}$

Finalement : $G(p) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{p^2} \quad - \quad \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{p} \quad + \quad \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{p+2}$

Puis $Y = \left(\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{p^2} \quad - \quad \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{p} \quad + \quad \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{p+2}\right) \times e^{-p}$

$\boxed{\text{Étape}_4}$: on reconnaît les originaux

$y(t) = \dfrac{1}{2}(t-1)U(t-1) - \dfrac{1}{4}U(t-1) + \dfrac{1}{4}e^{-2(t-1)}U(t-1)$

Simplifions cette expression suivant les intervalles où se trouve t

- Si $t < 1$ alors $U(t-1) = 0$

  donc $y(t) = 0$

- Si $1 \leqslant t$ alors $U(t-1) = 0$

  $y(t) = \dfrac{1}{2}t - \dfrac{3}{4} + \dfrac{e^2}{4}e^{-2t}$

3. $y'' + 2y = U(t-2)$ sachant que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$

$\boxed{\text{Étape}_1}$: on transforme

L'équation différentielle avec sa condition initiale devient : $pY - 0 \quad + \quad 2Y \quad = \dfrac{1}{p^2}e^{-p}$

$\boxed{\text{Étape}_2}$: on isole Y

On a : $p(pY - 0) - 0 + 2Y = \dfrac{1}{p} \times e^{-2p}$

Puis $Y = \dfrac{1}{(p^2+2)p} \times e^{-2p}$

$\boxed{\text{Étape}_3}$: on décompose le terme $G(p) = \dfrac{1}{p(p^2+2)}$

$G(p) = \dfrac{1}{p(p^2+2)} = \dfrac{A}{p} + \dfrac{Bp + C}{p^2+2}$

$A = \lim\limits_{p \to 0} p \times G(p) = \dfrac{1}{2} = A + 0$

pour B et C, on calcule $\lim\limits_{p \to i\sqrt{2}} (p^2+2) \times G(p) = \dfrac{1}{i\sqrt{2}} = 0 + Bi\sqrt{2} + C$

On a alors : $\dfrac{-i}{\sqrt{2}} = Bi\sqrt{2} + C$

donc $C = 0$ en identifiant les parties réelles de chaque côté du signe $=$

et $\dfrac{-1}{\sqrt{2}} = B\sqrt{2}$ en identifiant les parties imaginaires. C'est qui donne $B = \dfrac{-1}{2}$

Finalement : $G(p) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{p} \quad - \quad \dfrac{1}{2}\dfrac{p}{p^2+2}$

Puis $Y = \left(\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{p} \quad - \quad \dfrac{1}{2}\dfrac{p}{p^2+2}\right) \times e^{-2p}$

$\boxed{\text{Étape}_4}$: on reconnaît les originaux

On commence par donner l'originale de $\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{p} \quad - \quad \dfrac{1}{2}\dfrac{p}{p^2+2}$ qui est $\dfrac{1}{2}U(t) - \dfrac{1}{2} \times \cos(t\sqrt{2})\ U(t)$

Que l'on retarde de deux unités de temps. Pour cela on remplace chaque t par un $(t-2)$

Cela donne

$y(t) = \dfrac{1}{2}U(t-2) - \dfrac{1}{2} \times \cos((t-2)\sqrt{2})\ U(t-2)$

Simplifions cette expression suivant les intervalles où se trouve t

- Si $t < 2$ alors $U(t-2) = 0$

  donc $y(t) = 0$

- Si $2 \leqslant t$ alors $U(t-2) = 0$

  $y(t) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} \times \cos((t-2)\sqrt{2})$