EXERCICE 1 Déterminer les transformées des fonctions suivantes :

$f_1(t) = U(t) \times e^{-2t}$

$f_2(t) = t \times U(t) \times e^{-3t}$

$f_3(t) = (5t+1) \times U(t) \times e^{-t}$

$f_4(t) = 5\cos(3t) \times U(t) \times e^{-t}$

$f_5(t) = 2\sin(3t) \times U(t) \times e^{-4t}$

$f_6(t) = \Big(U(t) - U(t-1)\Big) \times e^{-2t}$

EXERCICE 2 Déterminer les originales des fonctions suivantes :

$F_1(p) = \dfrac{5}{p+2}$

$F_2(p) = \dfrac{2}{3p+1}$

$F_3(p) = \dfrac{4}{p(p+2)}$

$F_4(p) = \dfrac{5}{p^2+4}$

$F_5(p) = \dfrac{5}{(p+4)^2}$

$F_6(p) = \dfrac{5}{p^2-4}$

$F_7(p) = \dfrac{5}{(p+1)^2+4}$

$F_8(p) = \dfrac{5}{(p+1)^2-4}$

$F_9(p) = \dfrac{p+1}{(p+1)^2+4}$

$F_{10}(p) = \dfrac{p+3}{(p+1)^2+4}$

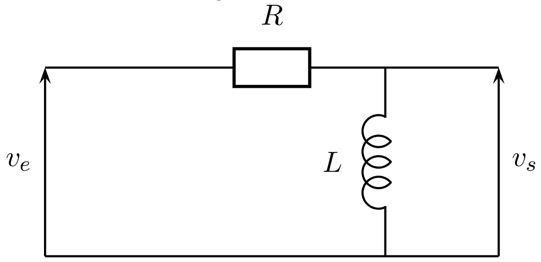
$F_{11}(p) = \dfrac{2p+1}{p^2+2p+3}$

$F_{12}(p) = \dfrac{p-1}{p^2+3p-4}$

$F_{13}(p) = \dfrac{p-1}{p^2+2p+5}$

$F_{14}(p) = \dfrac{3p+1}{2p^2+3p+1}$

EXERCICE 3 Le montage suivant est composé d'une bobine d'inductance $L = 0,001$ henry et d'une résistance R (en ohm) , assemblées en série.
Ce montage est utilisé pour l'extraction d'un signal CPL haute fréquence du réseau.



Les parties A et B de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante

Partie A : Test du filtre

Dans cette partie, la valeur de R est un paramètre strictement positif fixé.

Pour tester ce montage on le soumet à une tension d'entrée constante $v_e = 12$ volts.
On s'intéresse à la tension de sortie $v_s(t)$, exprimée en volt, en fonction du temps t (en seconde), aux bornes de la bobine L.
À $t = 0$, on admet que la tension aux bornes de la bobine est égale à 12 volts.
La tension v_s vérifie, pour tout $t \geqslant 0$: $v_s'(t) + \dfrac{R}{L}v_s(t) = 0$.

1. On rappelle que l'équation différentielle $ay' + by = 0$ (avec a et b réels et $a \neq 0$) admet pour solutions les fonctions définies, pour tout réel t , par :

$$y(t) = K\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}t}, \text{ avec } K \text{ constante réelle.}$$

Déterminer les solutions de l'équation différentielle

$$(E)\ :\ y'(t) + \frac{R}{L}y(t) = 0.$$

2. En déduire que pour tout $t \geqslant 0$: $v_s(t) = 12\mathrm{e}^{-1\,000Rt}$.

3. a. Quel est le sens de variation de la fonction v_s ? Justifier.

b. Déterminer la limite de $v_s(t)$ lorsque t tend vers l'infini. Justifier.

4. En précisant la méthode utilisée, déterminer la valeur de R (à $0,1$ ohm près) telle que, pour $t = 0,001$, la tension $v_s(t)$ soit égale à $1\,\%$ de la tension d'entrée v_e.

Partie B : Étude du filtre

Dans cette partie, on poursuit l'étude du montage représenté en début d'énoncé.
On rappelle que $L = 0,001$ henry et on prend $R = 5$ ohm.
On soumet le montage à une tension d'entrée $v_e(t)$, en volt, en fonction du temps t (en seconde).
On s'intéresse à la tension de sortie $v_s(t)$, en volt, en fonction du temps t (en seconde), aux bornes de la bobine L.

On admet que la fonction de transfert du montage est : $H(p) = \dfrac{p}{p + 5\,000}$.
On rappelle que l'on a : $V_s(p) = H(p) \times V_E(p)$
où $V_E(p)$ est la transformée de Laplace de $v_e(t)$ et $V_s(p)$ est la transformée de Laplace de $v_s(t)$.

1. On considère que pour tout réel t : $v_e(t) = 12\mathcal{U}(t) - 12\mathcal{U}\left(t - 8 \times 10^{-6}\right)$.

Déterminer la valeur de $v_e(t)$ pour $t < 0$, puis pour $0 \leqslant t \leqslant 8 \times 10^{-6}$ et enfin pour $t > 8 \times 10^{-6}$.

2. **a.** Déterminer la transformée de Laplace $V_E(p)$ de $v_e(t)$.

b. En déduire que : $V_S(p) = \dfrac{12}{p + 5\,000} - \dfrac{12}{p + 5\,000}\mathrm{e}^{-8\times10^{-6}p}$.

3. Exprimer $v_s(t)$ en fonction de t et de la fonction échelon $\mathcal{U}$.

4. On a représenté **en annexe** la tension de sortie v_s en fonction de t **exprimé en microseconde**.

Sur le même graphique représenter la tension d'entrée v_e.

Que constate-t-on ?

ANNEXE

Partie B, question 4.