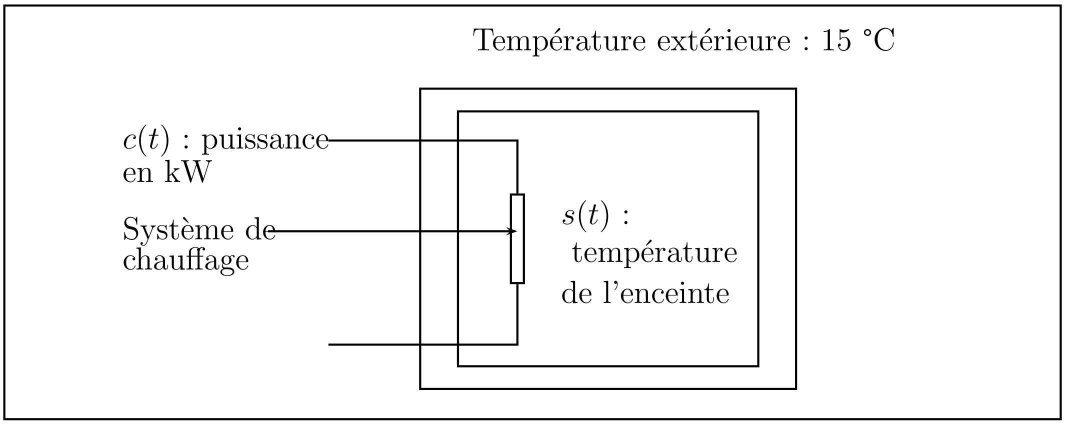
EXERCICE 1 On considère une enceinte fermée et isolée. La température à l'extérieur est supposée constante et égale à 15 °C.
À l'instant initial, la température à l'intérieur de l'enceinte est la même qu'à l'extérieur. On chauffe l'enceinte durant 20 secondes à une puissance constante de 1 300 kW, puis on arrête le chauffage.
On souhaite connaître la température de l'enceinte en fonction du temps t exprimé en seconde.



On note $c(t)$ la puissance de chauffe en kW à l'instant t et $s(t)$ la température à l'intérieur de l'enceinte à l'instant t.
On désigne par U la fonction échelon unité définie par $U(t) = 0$ si $t < 0$ et $U(t) = 1$ si $t \geqslant 0$.
Dans le système étudié, la fonction s est solution de l'équation différentielle (E) :

$$s'(t) + 0{,}2s(t) = e(t),$$

où $e(t) = 3U(t) + \dfrac{1}{130}c(t)$ et $s\left(0^+\right) = 0$.

On se propose de déterminer $s(t)$ en utilisant la transformation de Laplace. On suppose que s, s' et e admettent des transformées de Laplace.
On note $E(p) = \mathscr{L}(e(t))$ et $S(p) = \mathscr{L}(s(t))$, où $\mathscr{L}$ est la transformée de Laplace.

A. Étude du second membre de l'équation différentielle

1. *Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte.*

On a $c(t) = 1\,300\Big(U(t) - U(t-20)\Big)$. Indiquer la figure représentant la courbe de la fonction c.

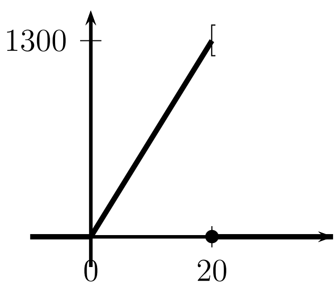


Figure 1

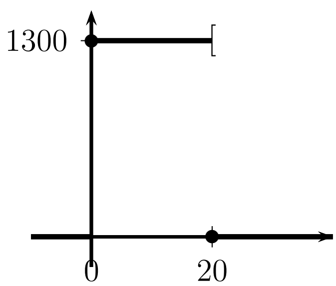


Figure 2

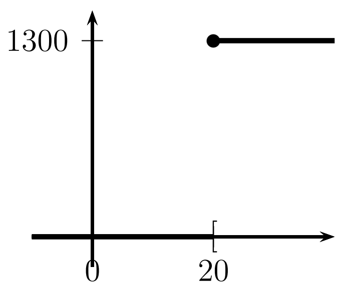


Figure 3

2. Montrer que $e(t) = 13U(t) - 10U(t-20)$.

3. Déterminer $\mathscr{L}(U(t))$ et $\mathscr{L}(U(t-20))$.

4. En déduire $E(p)$.

B. Transformée de Laplace S du signal de sortie

1. Déterminer $\mathscr{L}(s'(t))$ en fonction de $S(p)$.

2. a. Vérifier que $\mathscr{L}(s'(t) + 0{,}2s(t)) = (p + 0{,}2)S(p)$.

b. En appliquant la transformation de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle, montrer que $S(p) = \dfrac{13 - 10\mathrm{e}^{-20p}}{p(p+0{,}2)}$.

3. Un logiciel de calcul formel fournit le résultat suivant. Ce résultat est admis et pourra être exploité dans cette question.

▷**Calcul formel**

1	ElémentsSimples$(1/(p*(p+0.2)),p)$ $\rightarrow \dfrac{5}{p} - \dfrac{25}{5p+1}$

En déduire que $S(p)$ peut s'écrire : $S(p) = \dfrac{65}{p} - \dfrac{325}{5p+1} - \dfrac{50}{p}\mathrm{e}^{-20p} + \dfrac{250}{5p+1}\mathrm{e}^{-20p}$.

C. Expression du signal de sortie

1. Un logiciel de calcul formel fournit le résultat suivant. Ce résultat est admis et pourra être exploité dans les questions suivantes.

```
>>>inverse_Laplace_transform(65/p-325/(5p+1)-50/p*exp(-20p)+250/(5p+1)*exp(-20p),p,t)
```
$65U(t) - 65\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}t}U(t) - 50U(t-20) + 50\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}(t-20)}U(t-20)$

a. Préciser $s(t)$ sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0[$.

b. Soit t un nombre réel dans l'intervalle $[0\,;\,20[$.
Montrer que $s(t) = 65\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{1}{5}t}\right)$.

c. Soit t un nombre réel dans l'intervalle $[20\ ;\ +\infty[$.
Montrer que $s(t) = 15 - 65\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}t} + 50\mathrm{e}^{-\frac{1}{5}(t-20)}$.

2. Déterminer la température de l'enceinte pour $t = 60$ secondes. Arrondir à 10^{-2}.

EXERCICE 2 La fonction échelon unité U est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$U(t) = 0 \text{ si } \ t < 0 \quad \text{et} \ \ U(t) = 1 \ \text{ si } t \geqslant 0.$$

On considère un système électrique entrée-sortie. On note s le signal de sortie associé au signal d'entrée e. Les fonctions e et s sont des fonctions causales, c'est-à-dire qu'elles sont nulles pour $t < 0$. On admet que les fonctions e et s admettent des transformées de Laplace notées respectivement E et S.
La fonction de transfert H du système est définie par $S(p) = H(p) \times E(p)$.

On considère le signal d'entrée e définie sur $\mathbb{R}$ par $e(t) = U(t) - 2U(t-1)$ et la fonction H définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $H(p) = \dfrac{1}{p+1}$.

1. a. Calculer $e(0{,}5)$ et $e(2)$.

b. Tracer la courbe représentative de la fonction e dans le repère orthonormé fourni en **Annexe**

Remarque : on pourra calculer entre autres $e(-0{,}5)$, $e(0)$, $e(0{,}9)$, $e(1)$.

2. Pour tout $p > 0$, déterminer $E(p)$, E étant la transformée de Laplace du signal e. (On pourra utiliser le formulaire donné).

3. a. Donner alors l'expression de $S(p)$.

b. Vérifier que pour tout $p > 0$, $\dfrac{1}{p(p+1)} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1}$.

c. Justifier alors que pour tout $p > 0$, $\quad S(p) = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1} - 2 \times \dfrac{1}{p} \times \mathrm{e}^{-p} + 2 \times \dfrac{1}{p+1} \times \mathrm{e}^{-p}$.

4. Compléter le tableau fourni en **Annexe** , avec l'original des fonctions suivantes :

$$p \longmapsto \frac{1}{p}\ ;\ p \longmapsto \frac{1}{p+1}\ ;\ p \longmapsto \frac{1}{p}\mathrm{e}^{-p}\ ;\ p \longmapsto \frac{1}{p+1}\mathrm{e}^{-p}$$

En déduire l'expression de $s(t)$ sur l'intervalle $[0\,;\,1[$.

5. On admet que l'expression de la fonction s sur $[1\ ;\ +\infty[$ est : $s(t) = (2\mathrm{e} - 1)\mathrm{e}^{-t} - 1$.

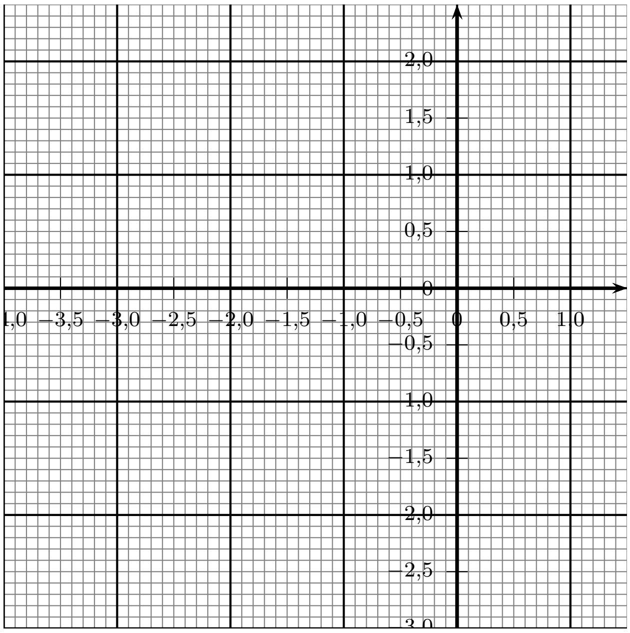
a. Calculer $s(1)$.

b. Compléter la courbe représentative de la fonction s dans le repère orthonormé fourni dans l'**Annexe** .

c. Donner la limite de la fonction s en $+\infty$.

ANNEXES

Question 1. b. : Courbe du signal d'entrée e



Question 4 : Tableau à compléter

Transformée	$p \longmapsto \dfrac{1}{p}$	$p \longmapsto \dfrac{1}{p+1}$	$p \longmapsto \dfrac{1}{p}\mathrm{e}^{-p}$	$p \longmapsto \dfrac{1}{p+1}\mathrm{e}^{-p}$
Original				

Question 6 : Courbe du signal de sortie s