EXERCICE 1 Calculer les transformées.

$f_1(t) = (2t-1)U(t)$ $\quad$ $f_2(t) = e^{-5t}U(t)$ $\quad$ $f_3(t) = \cos(3t)U(t)$

$f_4(t) = \sin(5t)U(t)$ $\quad$ $f_5(t) = e^{2t}U(t)$ $\quad$ $f_6(t) = te^{-5t}U(t)$

$f_7(t) = e^{-t}\cos(3t)U(t)$ $\quad$ $f_8(t) = e^{-t}\sin(5t)U(t)$ $\quad$ $f_9(t) = U(t-1)$

$f_{10}(t) = (t-1)U(t-1)$ $\quad$ $f_{11}(t) = \cos(3t-\pi)U(t-\pi)$ $\quad$ $f_{12}(t) = \sin(t)U(t-\frac{\pi}{3})$

EXERCICE 2 Décomposer en éléments simples.

$A = \frac{1}{(p+1)(p-2)}$ $\quad$ $B = \frac{p+2}{(p+1)(p-2)}$ $\quad$ $C = \frac{p+1}{p(p^2+1)}$ $\quad$ $D = \frac{1}{(p^2+1)(p-2)}$

$E = \frac{1}{(p+1)(p^2-4)}$ $\quad$ $F = \frac{1}{(p-3)(p^2+4)}$ $\quad$ $G = \frac{1}{p(p^2+2)}$ $\quad$ $H = \frac{p^3}{(p+1)(p-2)}$

EXERCICE 3 Retrouver des originaux.

$F_1(p) = \frac{2}{p+5}$ $\quad$ $F_2(p) = \frac{1}{p^2+9}$ $\quad$ $F_3(p) = \frac{p+1}{p^2+4}$ $\quad$ $F_4(p) = \frac{1}{p(p+2)}$

$F_5(p) = \frac{e^{-p}}{p^2}$ $\quad$ $F_6(p) = \frac{1}{p^2}(1-p)e^{-2p}$ $\quad$ $F_7(p) = e^{-p\frac{\pi}{2}}\frac{p}{p^2+4}$ $\quad$ $F_8(p) = \frac{e^{-3p}}{p(p+1)}$

$F_9(p) = \frac{1}{(p+1)^2}$ $\quad$ $F_{10}(p) = \frac{1}{(p+2)^2}$ $\quad$ $F_{11}(p) = \frac{1}{(p+1)^2+1}$ $\quad$ $F_{12}(p) = \frac{e^{-p}}{(p+1)^2+4}$

EXERCICE 4 Résoudre des équations différentielles d'ordre 1.

(E_1) $y' + y = U(t)$ et $y(0) = 1$ $\quad$ (E_2) $y' + 2y = tU(t)$ et $y(0) = 1$

(E_3) $y' + 3y = e^{-3t}U(t)$ et $y(0) = 1$ $\quad$ (E_4) $y' + y = \sin(3t)U(t)$ et $y(0) = 1$

EXERCICE 5 Résoudre des équations différentielles d'ordre 2.

(E_1) $y'' + 3y' + 2y = U(t)$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$ $\quad$ (E_2) $y'' + 4y = tU(t)$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$

EXERCICE 6 Résoudre un système différentiel.

Résoudre $\begin{cases} x' = 2x + 3y & x(0) = 1 \\ y' = -3x + 2y & y(0) = 0 \end{cases}$

EXERCICE 7 Un problème de BTS.

Dans ce problème, on s'intéresse à un filtre modélisé mathématiquement par l'équation différentielle suivante :

$$s'(t) + s(t) = e(t) \qquad s(0) = 0$$

La fonction e représente l'entrée aux bornes du filtre et la fonction s la sortie.
On admet que les fonctions e et s admettent des transformées de Laplace respectivement notées E et S.
La fonction de transfert H du filtre est définie par :

$$S(p) = H(p) \times E(p)$$

On rappelle que la fonction échelon unité, notée U, est définie par :

$$\begin{cases} U(t) = 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ U(t) = 1 & \text{si} \quad t \geq 0 \end{cases}$$

1. Montrer que : $H(p) = \frac{1}{p+1}$.

2. La fonction e est définie par : $e(t) = tU(t) - (t-1)U(t-1)$.

a. Représenter graphiquement la fonction e.

b. Montrer que : $E(p) = \frac{1}{p^2}\left(1 - \mathrm{e}^{-p}\right)$.

c. En déduire $S(p)$.

d. Déterminer les nombres réels a, b et c tels que : $\frac{1}{p^2(p+1)} = \frac{a}{p^2} + \frac{b}{p} + \frac{c}{p+1}$

e. En déduire l'original s de S.

f. Vérifier que :

$$\begin{cases} s(t) = 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ s(t) = t - 1 + \mathrm{e}^{-t} & \text{si} \quad 0 \leq t < 1 \\ s(t) = 1 + (1-\mathrm{e})\mathrm{e}^{-t} & \text{si} \quad 1 \leq t \end{cases}$$

3. a. Comparer $s\left(1^-\right)$ et $s\left(1^+\right)$.

b. Calculer $s'(t)$ et étudier son signe sur les intervalles $]0\,;\ 1[$ et $]1\ ;\ +\infty[$.

c. En déduire le sens de variation de la fonction s sur l'intervalle $]0\ :\ +\infty[$.

d. Déterminer la limite de la fonction s en $+\infty$.