Série d'exercices sur les transformées en z

Mémo :

$$e(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad \delta_0(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\mathcal{Z}(e(n)) = \frac{z}{z-1} \qquad \mathcal{Z}(\delta_0(n)) = 1$$

$$\mathcal{Z}(q^n e(n)) = \frac{z}{z-q} \qquad \mathcal{Z}(y(n-1)) = z^{-1} \times F(z)$$

EXERCICE 1 Soit y une suite causale définie sur $\mathbb{Z}$ par l'équation aux différences :

$$\frac{y(n) - y(n-1)}{0{,}1} + 2y(n-1) = 3e(n)$$

1. Exprimer $y(n)$ en fonction de $e(n)$ et de $y(n-1)$
2. Calculer $y(n)$ pour $n \in \{-1{,}0{,}1{,}2\}$
3. On note $F(z)$ la transformée de y. Exprimer $F(z)$ en fonction de z
4. Soit $G(z) = \dfrac{F(z)}{z}$, décomposer $G(z)$ en éléments simples
5. Donner alors une expression de $F(z)$ ne faisant apparaître que des transformées usuelles.
6. En déduire une expression de $y(n)$ en fonction de n
7. Vérifier le résultat avec la question 2

EXERCICE 2 Soit y une suite causale définie sur $\mathbb{Z}$ par l'équation aux différences :

$$\frac{y(n) - y(n-1)}{0{,}01} + 15y(n-1) = 4e(n) + \delta_0(n)$$

1. Exprimer $y(n)$ en fonction de de $\delta_0(n)$, $e(n)$ et de $y(n-1)$
2. Calculer $y(n)$ pour $n \in \{-1{,}0{,}1{,}2\}$
3. On note $F(z)$ la transformée de y. Exprimer $F(z)$ en fonction de z
4. Soit $G(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-\frac{17}{20})}$, décomposer $G(z)$ en éléments simples
5. Donner alors une expression de $F(z)$ ne faisant apparaître que des transformées usuelles.
6. En déduire une l'expression de $y(n)$ en fonction de n
7. Vérifier le résultat avec la question 2
8. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} y(n)$