Série d'exercices sur les transformées en z

EXERCICE 1

On considère l'équation aux différences :

$$(ED) \qquad \frac{y(n)-y(n-1)}{T_e}+5y(n)=ne(n)$$

où y est une fonction causale, $e(n)=\begin{cases}1 \text{ si } n\geqslant 0\\ 0 \text{ si } n<0\end{cases}$ et $T_e=0{,}1s$

1. Écrire la transformée en $\mathscr{Z}$ l'équation (ED), on notera Y la transformée de y
2. Décomposer $G(z)=\dfrac{Y(z)}{z}$ en éléments simples.
3. En déduire l'expression de $Y(z)$en fonction de z
4. En utilisant la table des transformées, retrouver l'expression de $y(n)$ en fonction de n
5. Calculer la limite de $y(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$

EXERCICE 2

On note e l'échelon causal discret, défini sur l'ensemble des nombres entiers relatifs par : $\begin{cases}e(n)=0 & \text{si } n<0\\ e(n)=1 & \text{si } n\geq 0\end{cases}$

On considère un système entrée-sortie. Le signal de sortie est modélisée par une fonction causale s telle que $s(0)=0$ et vérifiant l'équation différentielle suivante :

$$s''(t)+3s'(t)+s(t)=U(t)$$

Une discrétisation de l'équation différentielle (E) avec un pas de discrétisation T_e permet d'obtenir, pour tout entier naturel n, la relation (E') suivante :

$$\frac{x(n+1)-2x(n)+x(n-1)}{T_e^2}+3\frac{x(n+1)-x(n)}{T_e}+x(n)=e(n)$$

Pour tout nombre entier n, le nombre réel $x(n)$ fournit une approximation de $s(nT_e)$.
En particulier, on a : $x(0)=s(0)=0$
Pour toute la suite de l'exercice, on prend $T_e=0{,}1$ seconde.

1. Montrer que la relation (E') peut s'écrire, pour tout nombre entier positif ou nul, sous la forme :

$$130\ x(n+1)-229\ x(n)+100\ x(n-1)=1$$

2. Compléter le tableau de valeurs ci-dessous avec les valeurs approchées à 10^{-3} près des nombres réels $x(n)$

n	0	1	2	3
$x(n)$				

3. On note $X(z)$ la transformée en $\mathcal{Z}$ de la suite $x(n)$.

   Montrer que : $X(z)=\dfrac{z^2}{130(z-1)(z-\frac{4}{5})(z-\frac{25}{26})}$

4. Déterminer les réels A, B et C tels que :

$$\frac{z}{(z-1)(z-\frac{4}{5})(z-\frac{25}{26})} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-\frac{4}{5}} + \frac{C}{z-\frac{25}{26}}$$

5. En déduire l'expression de $x(n)$ pour tout entier naturel n, on a :

6. Préciser la limite de $x(n)$ quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 3

Soit (y_n) une suite causale définie sur $\mathbb{Z}$ par l'équation (E) : $y(n) = \frac{1}{3}y(n-1) + \frac{4}{3}y(n-2) + d_0(n)$

1. Calculer $y(n)$ pour chaque n compris entre 0 et 3.
Quelle semble être la limite de $y(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$?

2. Écrire la transformée en $\mathscr{Z}$ l'équation (E), on notera Y la transformée de y

3. Exprimer $Y(z)$ en fonction de z

4. On écrit $G(z) = \dfrac{Y(z)}{z}$, décomposer $G(z)$ en éléments simples.

5. En déduire l'expression de $y(n)$en fonction de n

6. Vérifier ce résultat en retrouvant les valeurs obtenues en 1)
puis calculer la limite de $y(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$

EXERCICE 4

On note $\mathscr{U}$ la fonction échelon unité définie, sur l'ensemble des nombres réels, par

$$\begin{cases} \mathscr{U}(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ \mathscr{U}(t) = 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

Une fonction définie sur l'ensemble des nombres réels est dite causale lorsque cette fonction est nulle sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 0[$.
On considère un système entée-sortie analogique du premier ordre dont la fonction de transfert H est définie par

$$H(p) = \frac{2}{1+0{,}5p}$$

1. On considère la fonction causale s dont la transformée de Laplace est

$$S(p) = \frac{2}{p(1+0{,}5p)}$$

La fonction s modélise la réponse du système analogique à l'échelon unité $\mathscr{U}$.

a. Vérifier que

$$S(p) = \frac{2}{p} - \frac{2}{p+2}$$

b. En déduire $s(t)$ pour tout nombre réel t positif ou nul.

c. Compléter la ligne donnant les valeurs de $s(t)$ dans le tableau 2 du document réponse 2 en donnant les valeurs approchées à 10^{-3} près.

2. On considère maintenant un système entrée-sortie numérique dont la fonction de transfert F est définie par

$$F(z) = H\left(100\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)$$

Ce système numérique permet d'approcher le système analogique.

L'entrée et la sortie du système numérique sont modélisés, respectivement, par deux suites causales x et y. Ces deux suites admettent des transformées en $\mathcal{Z}$ notées, respectivement, $X(z)$ et $Y(z)$ telles que

$$Y(z) = F(z)X(z)$$

a. Montrer que

$$F(z) = \frac{2\left(1+z^{-1}\right)}{51-49z^{-1}}$$

b. En déduire que

$$51Y(z) - 49z^{-1}Y(z) = 2X(z) + 2z^{-1}X(z)$$

c. En déduire que, pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 0, on a :

$$y(n) = \frac{49}{51}y(n-1) + \frac{2}{51}x(n) + \frac{2}{51}x(n-1)$$

3. On suppose dans cette question que, pour tout nombre entier n, on a

$x(n) = d(n)$, où d est la suite impulsion unité définie par

$$\begin{cases} d(0) = 1 \\ d(n) = 0 \quad \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

Grâce à la formule obtenue dans la question **2c**, compléter le tableau **??** du document réponse 2. On pourra utiliser des valeurs approchées à 10^{-3} près.

4. Dans cette question, on suppose que, pour tout entier n, on a $x(n) = e(n)$ où e est la suite échelon unité définie par

$$\begin{cases} e(n) = 0 \quad \text{si } n < 0 \\ e(n) = 1 \quad \text{si } n \geq 0 \end{cases}$$

On admet que

$$Y(z) = \frac{2z(z+1)}{(51z-49)(z-1)}$$

a. Vérifier que

$$Y(z) = \frac{2z}{z-1} - \frac{100}{51} \times \frac{z}{z-\frac{49}{51}}$$

b. En déduire $y(n)$ pour tout nombre entier naturel n.

c. Compléter la ligne donnant les valeurs de $y(n)$ dans le tableau **??** du document réponse 2 avec des valeurs approchées à 10^{-3} près.

Document réponse 2

n	-1	0	1	2	3
$d(n)$	0	1	0	0	0
$y(n)$	0				

Tableau 1 (ici $x(n) = d(n)$)

n	0	10	20	30	40	50	100	150
$y(n)$	0,039		1,119	1,410		1,735		
$t = 0{,}02n$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	2	3
$s(t)$	0	0,659			1,596		1,963	

Tableau 2 (ici $x(n) = e(n)$)