

## VOCABULAIRE

En 3D, un **vecteur** non nul est une flèche caractérisée (une direction, un sens, une intensité ou norme), on le note  $\vec{u}$  ou  $\overrightarrow{AB}$ . La lettre  $A$  est alors son origine et  $B$  son extrémité.

La **norme** d'un vecteur se note  $\|\vec{u}\|$

Un vecteur est **nul** s'il a une norme nulle, on ne définit alors ni sa direction ni son sens. On le note  $\vec{0}$

L'**opposé** d'un vecteur non nul est un vecteur qui a la même direction, la même norme, mais le sens opposé. L'opposé de  $\vec{u}$  se note  $-\vec{u}$

Pour **additionner** deux vecteurs, on les place bout à bout. Le vecteur somme a pour origine l'origine du premier vecteur et pour extrémité l'extrémité du second. On peut noter  $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

En particulier,  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$  : c'est la relation de Chasles

Pour **soustraire** deux vecteurs, on ajoute l'opposé.  $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

Le résultat de la somme  $\vec{u} + \vec{u}$  se note  $2\vec{u}$

Lorsqu'il existe un réel  $k$  tel que  $\vec{v} = k\vec{u}$  on dit que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont **colinéaires**.

Deux vecteurs non nuls sont dits orthogonaux lorsque leurs directions sont **perpendiculaires**.

Par convention le vecteur nul est orthogonal à tout autre vecteur.

Lorsque  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires, s'il existe des réels  $a$  et  $b$  tels que  $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$  alors on dit que les trois vecteurs sont **coplanaires**.

Trois vecteurs non coplanaires constituent une **base de l'espace**. Tout vecteur se décompose alors en combinaison linéaire unique de ces trois vecteurs :

Si  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  est une base de l'espace alors pour tout vecteur  $\vec{w}$  de l'espace, il existe un unique triplet de réels  $(a, b, c)$  tel que  $\vec{w} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ .

Ce triplet est appelé les **composantes** de  $\vec{w}$  dans  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . On note alors

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Trois vecteurs non nuls sont **directement orthogonaux** lorsqu'ils sont perpendiculaires deux à deux et que leur disposition définit un sens direct de l'espace. (règle des trois doigts, du tournevis, du bonhomme d'Ampère)

Un point  $O$  et une base  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  constituent un **repère de l'espace**  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Le point  $O$  est alors appelé origine du repère. Pour tout point  $M$  de l'espace, il existe alors un unique triplet  $(a, b, c)$  tel que  $\overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ . Ce triplet est appelé les **coordonnées** du point  $M$  et on note  $M(a; b; c)$

## OUTILS

Le **produit scalaire** de  $\vec{u}$  et de  $\vec{v}$  est le nombre défini par  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$

**Intérêt** : pour deux vecteurs (non nuls)  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  on a :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  ssi  $\vec{u} \perp \vec{v}$

**Propriétés** : pour tous vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  et tout réel  $k$  on a :

1.  $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$  une façon de calculer la norme d'un vecteur
2.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$  le produit scalaire est symétrique
3.  $(-\vec{u}) \cdot \vec{v} = -(\vec{u} \cdot \vec{v})$  il est linéaire (de chaque côté)
4.  $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k \times \vec{u} \cdot \vec{v}$
5.  $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$  on peut distribuer

**Conséquences** dans une base orthogonale directe, avec  $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$  et  $\vec{v} = a'\vec{i} + b'\vec{j} + c'\vec{k}$  :

- la propriété n°5 donne  $\vec{u} \cdot \vec{v} = a \times a' + b \times b' + c \times c' = aa' + bb' + cc'$
- avec deux fois le même vecteur on a :  $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = a^2 + b^2 + c^2$  donc  $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
- Puisque  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v}) = aa' + bb' + cc'$  on a donc  $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{aa' + bb' + cc'}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$

**Géométrie** Soit  $A$  un point de l'espace et  $\vec{n}$  un vecteur non nul

L'ensemble des points  $M(x; y; z)$  tels que  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$  constitue le plan passant par  $A$  et de vecteur normal  $\vec{n}$

Lorsque  $A(x_A; y_A; z_A)$  et  $\vec{n} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ , cela donne pour tout  $M(x; y; z)$  :  $\begin{bmatrix} x - x_A \\ y - y_A \\ z - z_A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0$

En développant, on obtient  $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$

ce qui constitue une équation cartésienne du plan passant par  $A$  et de vecteur normal  $\vec{n}$

Réciproquement toute équation de la forme  $ax + by + cz + d = 0$  est une équation d'un plan dont un

vecteur normal est  $\vec{n} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

## OUTILS (suite)

Le **produit vectoriel** de  $\vec{u}$  et de  $\vec{v}$  est le vecteur défini par  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \sin(\vec{u}, \vec{v}) \vec{k}$  où  $\vec{k}$  est un vecteur unitaire directement orthogonal à  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$

**Intérêt** : pour deux vecteurs (non nuls)  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  on a :  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$  ssi  $\vec{u} \parallel \vec{v}$

**Propriétés** : pour tous vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  et tout réel  $k$  on a :

1.  $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$  le produit vectoriel est antisymétrique
2.  $(-\vec{u}) \wedge \vec{v} = -(\vec{u} \wedge \vec{v})$
3.  $(k\vec{u}) \wedge \vec{v} = k \times \vec{u} \wedge \vec{v}$
4.  $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$  on peut distribuer

**Conséquences** dans une base orthogonale  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  directe, avec

$$\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{v} = a'\vec{i} + b'\vec{j} + c'\vec{k} :$$

• on a :  $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$  ;  $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$  ;  $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$

• donc  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{bmatrix} bc' - b'c \\ a'c - ac' \\ ab' - a'b \end{bmatrix}$

**Géométrie** Soit  $A, B, C$  trois points de l'espace. Déterminent-ils un plan ? Si oui, en donner une équation cartésienne.

On calcule les composantes de  $\overrightarrow{AB}$  et de  $\overrightarrow{AC}$  puis on calcule  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{n}$

Si  $\vec{n}$  est nul alors les trois points sont alignés et il existe une infinité de plans passant par ces trois points.

Sinon ils déterminent un plan dont un vecteur normal est  $\vec{n}$

Une équation cartésienne du plan s'obtient en développant  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$  comme précédemment.

Cela s'écrit aussi  $\overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0$

## OUTILS (fin)

Cette combinaison de produits se nomme le **produit mixte** de  $\overrightarrow{AM}$ , de  $\overrightarrow{AB}$  et de  $\overrightarrow{AC}$ , on le note  $[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$

Par définition le produit mixte de  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  est le réel noté  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$  égal à  $\vec{u} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{w})$

**Propriétés** : pour tous vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  et tout réel  $k$ , la valeur de  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$  :

1.  $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$  ssi  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  sont coplanaires.
2. change de signe si on change la place de deux vecteurs.
3. change de signe si on remplace un vecteur par son opposé.
4. est multipliée par  $k$  si on multiplie un seul vecteur par  $k$
5. est égale au déterminant de la matrice formée en colonnes par les composantes des vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  dans cet ordre.

## USAGES

Le **produit scalaire** permet :

- de calculer un angle entre deux vecteurs ;
- de tester l'orthogonalité de deux vecteurs ;
- de calculer une longueur ou une distance ;
- de déterminer une équation cartésienne de plan.

Le **produit vectoriel** permet :

- de tester le parallélisme de deux vecteurs ;
- de calculer l'aire d'un parallélogramme ;
- de calculer l'aire d'un triangle ;

- de déterminer un vecteur normal à un plan ;
- de déterminer une équation cartésienne d'un plan.

Le **produit mixte** permet :

- de tester la coplanarité de trois vecteurs ;
- de calculer le volume d'un parallélépipède ;
- de calculer le volume d'un tétraèdre ;
- de déterminer si quatre points sont coplanaires.