**EXERCICE 1** Calculer le gradient des fonctions suivantes.

## 1. Cas simples

$f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad g(x,y) = xy \qquad h(x,y) = x^3 + y^2$

## 2. Cas plus élaborés

$f(x,y) = x^2 y \qquad g(x,y) = e^{2x+3y} \qquad h(x,y) = \ln(x^3 + y^2) \qquad p(x,y) = \sin(x^2 y)$

## 3. En dimension 3

$f(x,y,z) = x^2 - y^2 + 3z^2 \qquad g(x,y,z) = x^2 y^3 z \qquad h(x,y,z) = e^{2xy+4z+1}$

**EXERCICE 2** Calculer la dérivée directionnelle des fonctions suivantes au point donné, dans la direction du vecteur indiqué.

## 1. Cas simples

$f(x,y) = x^2 + y^2, \quad A(1,1), \quad \vec{u} = (1,0)$
$g(x,y) = x^2 y, \quad A(1,2), \quad \vec{u} = (0,1)$
$h(x,y) = x^3 - y^2, \quad A(0,1), \quad \vec{u} = (1,1)$

## 2. Cas plus élaborés

$f(x,y) = x^2 y, \quad A(1,1), \quad \vec{u} = (1,2)$
$g(x,y) = e^{xy}, \quad A(0,1), \quad \vec{u} = (1,1)$
$h(x,y) = \ln(3x^2 + y^2), \quad A(1,1), \quad \vec{u} = (2,-1)$

**EXERCICE 3** Déterminer une équation du plan tangent aux surfaces suivantes au point donné.

## 1. Cas simples

$f(x,y) = x^2 + y^2, \quad A(1,1)$
$g(x,y) = xy, \quad A(1,2)$
$h(x,y) = x^2 - y^2, \quad A(0,1)$

## 2. Cas plus élaborés

$f(x,y) = x^2 y, \quad A(1,1)$
$g(x,y) = e^{3x+y}, \quad A(0,0)$
$h(x,y) = \ln(5x^2 + y^2), \quad A(1,1)$

## 3. Interprétation

Pour chacune des fonctions précédentes :

- Calculer le gradient en $A$.
- Écrire le plan tangent sous la forme

$$z = f(A) + \nabla f(A) \cdot \big((x,y) - A\big).$$

- Interpréter géométriquement le gradient.

**EXERCICE 4** Calculer la divergence des champs de vecteurs suivants.

## 1. Cas simples

$\vec{F}(x,y) = (x,y)$ $\quad$ $\vec{G}(x,y) = (xy,x^2)$

## 2. En dimension 3

$\vec{F}(x,y,z) = (x,y,z)$ $\quad$ $\vec{G}(x,y,z) = (xy,yz,zx)$ $\quad$ $\vec{H}(x,y,z) = (x^3,xy^2,xyz)$

**EXERCICE 5** Calculer le rotationnel des champs de vecteurs suivants.

## 1. Cas simples

$\vec{F}(x,y,z) = (y,-x,0)$ $\quad$ $\vec{G}(x,y,z) = (0,z,-y)$

## 2. Cas plus élaborés

$\vec{F}(x,y,z) = (xy,yz,zx)$ $\quad$ $\vec{G}(x,y,z) = (xy,yz,zx)$

**EXERCICE 6** Déterminer les points critiques des fonctions suivantes.

## 1. Cas simples

$f(x,y) = x^2 + y^2 + 2y + 1$ $\quad$ $g(x,y) = x^2 - y^2$ $\quad$ $h(x,y) = xy$

## 2. Cas plus élaborés

$f(x,y) = x^3 - 3xy^2$ $\quad$ $g(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$ $\quad$ $h(x,y) = x^2y + y^2$

## 3. En dimension 3

$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ $\quad$ $g(x,y,z) = xyz$

**EXERCICE 7** Déterminer la nature des points critiques des fonctions suivantes.

## 1. Cas simples

$f(x,y) = x^2 + y^2$ $\quad$ $g(x,y) = x^2 - y^2$ $\quad$ $h(x,y) = -x^2 - y^2$

## 2. Cas plus élaborés

$f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$ $\quad$ $g(x,y) = x^3 - 3xy^2$ $\quad$ $h(x,y) = x^2 + xy + y^2$

## 3. Cas avec fonctions non polynomiales

$f(x,y) = e^{x^2+y^2}$ $\quad$ $g(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ $\quad$ $h(x,y) = \sin(x)\cos(y)$

# Éléments de correction

**EXERCICE 1** Éléments de correction : gradient.

## 1. Cas simples

$\nabla f(x,y) = (2x,2y)$ $\quad \nabla g(x,y) = (y,x)$
$\nabla h(x,y) = (3x^2,2y)$

## 2. Cas plus élaborés

$\nabla f(x,y) = (2xy,x^2)$
$\nabla g(x,y) = (2e^{2x+3y},3e^{2x+3y})$
$\nabla h(x,y) = \left(\dfrac{3x^2}{x^3+y^2},\dfrac{2y}{x^3+y^2}\right)$
$\nabla p(x,y) = (2xy\cos(x^2y),x^2\cos(x^2y))$

## 3. En dimension 3

$\nabla f(x,y,z) = (2x,-2y,6z)$
$\nabla g(x,y,z) = (2xy^3z,3x^2y^2z,x^2y^3)$
$\nabla h(x,y,z) = (2ye^{2xy+4z+1},2xe^{2xy+4z+1},4e^{2xy+4z+1})$

**EXERCICE 2** Éléments de correction : dérivées directionnelles.
On utilise $D_{\vec{u}}f(A) = \nabla f(A)\cdot\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$.

## 1. Cas simples

$\nabla f = (2x,2y) \Rightarrow \nabla f(1,1) = (2,2) \Rightarrow D_{\vec{u}}f = 2$
$\nabla g = (2xy,x^2) \Rightarrow \nabla g(1,2) = (4,1) \Rightarrow D_{\vec{u}}g = 1$
$\nabla h = (3x^2,-2y) \Rightarrow \nabla h(0,1) = (0,-2) \Rightarrow D_{\vec{u}}h = -2$

## 2. Cas plus élaborés

$\nabla f(1,1) = (2,1) \Rightarrow D_{\vec{u}}f = 2\times 1 + 1\times 2 = 4$
$\nabla g = (ye^{xy},xe^{xy}) \Rightarrow \nabla g(0,1) = (1,0) \Rightarrow D_{\vec{u}}g = 1$
$\nabla h = \left(\dfrac{6x}{3x^2+y^2},\dfrac{2y}{3x^2+y^2}\right) \Rightarrow \nabla h(1,1) = \left(\dfrac{6}{4},\dfrac{2}{4}\right) = \left(\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2}\right) \Rightarrow D_{\vec{u}}h = 3-\dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{2}$

**EXERCICE 3** Éléments de correction : plans tangents.
Formule : $z = f(A) + \nabla f(A)\cdot((x,y)-A)$.

## 1. Cas simples

$f(1,1) = 2,\ \nabla f(1,1) = (2,2) \Rightarrow z = 2+2(x-1)+2(y-1) = 2x+2y-2$
$g(1,2) = 2,\ \nabla g(1,2) = (2,1) \Rightarrow z = 2+2(x-1)+(y-2) = 2x+y-2$
$h(0,1) = -1,\ \nabla h(0,1) = (0,-2) \Rightarrow z = -1-2(y-1) = 1-2y$

## 2. Cas plus élaborés

$f(1,1) = 1,\ \nabla f(1,1) = (2,1) \Rightarrow z = 1+2(x-1)+(y-1) = 2x+y-2$
$g(0,0) = 1,\ \nabla g(0,0) = (3,1) \Rightarrow z = 1+3x+y$
$h(1,1) = \ln(6),\ \nabla h(1,1) = \left(\dfrac{10}{6},\dfrac{2}{6}\right) = \left(\dfrac{5}{3},\dfrac{1}{3}\right) \Rightarrow z = \ln(6)+\dfrac{5}{3}(x-1)+\dfrac{1}{3}(y-1)$

**EXERCICE 4** Éléments de correction : divergence.

## 1. Cas simples

$\operatorname{div}\vec{F} = 1+1 = 2$ $\quad \operatorname{div}\vec{G} = y+0 = y$

## 2. En dimension 3

$\operatorname{div}\vec{F} = 1+1+1 = 3$
$\operatorname{div}\vec{G} = y+z+x$
$\operatorname{div}\vec{H} = 3x^2+2xy+xy = x(3x+3y)$

**EXERCICE 5** Éléments de correction : rotationnel.

## 1. Cas simples

$\operatorname{rot}\vec{F} = (0,0,-2)$
$\operatorname{rot}\vec{G} = (-1,0,0)$

## 2. Cas plus élaborés

$\operatorname{rot}\vec{F} = (-y,-z,-x)$
$\operatorname{rot}\vec{G} = (-y,-z,-x)$

**EXERCICE 6** Éléments de correction : points critiques.

## 1. Cas simples

$\nabla f = (2x,2y+2) = 0 \Rightarrow (0,-1)$
$\nabla g = (2x,-2y) = 0 \Rightarrow (0,0)$
$\nabla h = (y,x) = 0 \Rightarrow (0,0)$

## 2. Cas plus élaborés

$\nabla f = (3x^2-3y^2,-6xy) = 0 \Rightarrow (0,0)$
$\nabla g = (2x-2,2y-4) = 0 \Rightarrow (1,2)$
$\nabla h = (2xy,x^2+2y) = 0 \Rightarrow (0,0)$

## 3. En dimension 3

$\nabla f = (2x,2y,2z) = 0 \Rightarrow (0,0,0)$
$\nabla g = (yz,xz,xy) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = 0$ ou $z = 0$

**EXERCICE 7** Éléments de correction : nature des points critiques.

## 1. Cas simples

$f$ : minimum en $(0,0)$
$g$ : point selle en $(0,0)$
$h$ : maximum en $(0,0)$

## 2. Cas plus élaborés

$f$ : minimum en $(1,2)$
$g$ : point selle en $(0,0)$
$h$ : minimum en $(0,0)$

## 3. Cas non polynomiaux

$f$ : minimum en $(0,0)$
$g$ : pas de point critique (non défini en $(0,0)$)
$h$ : points critiques pour $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $y = k\pi$, points selle