EXERCICE 1 Champ scalaire / champ vectoriel
On considère les fonctions suivantes :

$$f(x,y) = x^2 + y \quad ; \quad \vec{F}(x,y) = \begin{bmatrix} x+y \\ xy \end{bmatrix}$$

- Dire laquelle est un champ scalaire et laquelle est un champ vectoriel.
- Donner l'image du point (1,2) pour chacune.

EXERCICE 2 Dérivées partielles
Soit $f(x,y) = x^3 + 2xy - y^2$

- Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$
- Calculer $\frac{\partial f}{\partial y}$
- Évaluer en $(1; -1)$

Soit $g(x,y) = e^x y + xy^2$

- Calculer $\frac{\partial g}{\partial x}$
- Calculer $\frac{\partial g}{\partial y}$
- Évaluer en $(0; 1)$

EXERCICE 3 Gradient
Soit $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$

- Calculer $\text{grad}(f)$
- Évaluer en $(1; 1)$

Soit $g(x,y) = x^2 - y^2 + 2x$

- Calculer $\text{grad}(g)$
- Évaluer en $(1; 1)$

EXERCICE 4 Différentielle
Soit $f(x,y) = x^2 y$

- Calculer df
- Estimer la variation entre $(1; 2)$ et $(1{,}01; 2{,}02)$

Soit $g(x,y) = xy^2$

- Calculer dg
- Estimer la variation entre $(1{,}2)$ et $(1{,}01; 2{,}02)$

EXERCICE 5 Dérivée directionnelle

Soit $f(x,y) = x^2 + y^2$

- Calculer le gradient
- Calculer la dérivée directionnelle en $(1,1)$ selon $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ puis $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Soit $g(x,y) = x^2 - xy$

- Calculer le gradient
- Calculer la dérivée directionnelle en $(1;1)$ selon les mêmes vecteurs

EXERCICE 6 Lignes de niveau

Soit $f(x,y) = x^2 + y^2$

- Décrire la ligne de niveau 4
- Vérifier l'orthogonalité du gradient en $(2;0)$

Soit $g(x,y) = xy$

- Décrire la ligne de niveau 1
- Vérifier l'orthogonalité du gradient en $(1;1)$

EXERCICE 7 Plan tangent

Soit $f(x,y) = xy$

- Déterminer le plan tangent en $(1;2)$

Soit $g(x,y) = x^2 + y^2$

- Déterminer le plan tangent en $(1;1)$

EXERCICE 8 Points critiques

Soit $f(x,y) = x^2 - y^2$

- Déterminer les points critiques
- Donner leur nature

Soit $g(x,y) = x^2 + y^2 + 2x$

- Déterminer les points critiques
- Donner leur nature

CORRIGÉ 1

- f est un champ scalaire, $\vec{F}$ un champ vectoriel
- $f(1{,}2) = 3$, $\vec{F}(1{,}2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

CORRIGÉ 2

$$f_x = 3x^2 + 2y, \quad f_y = 2x - 2y$$
$$f_x(1,-1) = 1, \quad f_y(1,-1) = 4$$

$$g_x = e^x y + y^2, \quad g_y = e^x + 2xy$$
$$g_x(0{,}1) = 2, \quad g_y(0{,}1) = 1$$

CORRIGÉ 3

$$\text{grad}(f) = \begin{bmatrix} 2x + y \\ x + 2y \end{bmatrix}, \quad \text{grad}(1{,}1) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{grad}(g) = \begin{bmatrix} 2x + 2 \\ -2y \end{bmatrix}, \quad \text{grad}(1{,}1) = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

CORRIGÉ 4

$$df = 2xy\,dx + x^2\,dy$$
$$df \approx 0{,}06$$

$$dg = y^2\,dx + 2xy\,dy$$
$$dg \approx 0{,}12$$

CORRIGÉ 5

$$\text{grad}(f)(1{,}1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

et en notant $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$ donc

$$f'_{(1,1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}, \quad f'_{(-1,1)} = 0$$

$$\text{grad}(g)(1{,}1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$
$$g'_{(1,1)} = 0, \quad g'_{(-1,1)} = -\sqrt{2}$$

CORRIGÉ 6

$$x^2 + y^2 = 4$$
$$\text{grad}(2{,}0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4{,}0) \cdot (0{,}1) = 0$$

$$xy = 1$$
$$\text{grad}(1{,}1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (1{,}1) \cdot (1,-1) = 0$$

CORRIGÉ 7

$$-2(x-1) - (y-2) + (z-2) = 0$$

$$-2(x-1) - 2(y-1) + (z-2) = 0$$

CORRIGÉ 8

$$(0{,}0), \quad \text{point col}$$

$$(-1{,}0), \quad \text{minimum local}$$