

EXERCICE 1

1. Calculer le gradient de $f(x,y,z) = 2x^2y - \frac{y}{z} + 5x + 4$
2. Calculer la divergence de $f(x,y,z) = (3x^2y, xe^y, \frac{x}{z+1})$
3. Calculer le rotationnel de $f(x,y,z) = (x^2yz, xyz, -y + 3x)$.
4. Le laplacien de $f(x,y) = 2x^2e^{xy}$ est-il $\Delta f(x,y) = e^{xy}(2x^4 + 2x^2y^2 + 8xy + 4)$?

EXERCICE 2 Déterminer la nature de point critique de $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$

EXERCICE 3 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$

1. Calculer le gradient de f et la matrice hessienne de f en (x,y) .
2. Montrer que les coordonnées des points critiques vérifient
$$\begin{cases} x^3 = y \\ y^3 = x \end{cases}$$
3. Sachant que $y^9 - y = y(y^4 - 1)(y^4 + 1)$.
Montrer que les seuls points critiques sont en $(x,y) = (0,0)$, ou en $(1,1)$ ou en $(-1, -1)$.
4. Quelle est, en justifiant, la nature des points critiques en $(0,0)$ et en $(1,1)$?
5. On souhaite établir une équation du plan \mathcal{P} tangent à la surface (S) d'équation cartésienne $z = f(x,y)$ en $(2,1)$.
 - (a) Donner un vecteur normal à \mathcal{P} .
 - (b) Établir alors une équation cartésienne de \mathcal{P} .