Fonctions de plusieurs variables

EXERCICE 1 Soit la fonction f définie par $f(x,y) = x^2y^3 + \mathrm{e}^{xy} + \dfrac{x}{y}$.

1. Déterminer les dérivées partielles premières : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$.
2. Calculer les dérivées partielles secondes : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)$.
3. Vérifier que : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

EXERCICE 2 Soit la fonction définie par : $f(x,y) = x^2y + \mathrm{e}^{x-2y} + 3x - \ln(y+2)$.

1. Déterminer les dérivées partielles premières de la fonction f.
2. En déduire le gradient de f, noté
$$\nabla f(x,y).$$
3. Écrire la différentielle de f au point (x,y).
4. Déterminer la dérivée directionnelle de f selon $\overrightarrow{u}(1, -1)$ au point $A(2;3)$.

EXERCICE 3 Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^3 - 3xy^2 - 6x^2 + 12y - \dfrac{12}{x}$
Déterminer l'ensemble des points critiques de f, c'est-à-dire l'ensemble des points (x,y) tels que

$\nabla f(x,y) = 0$. On ne demande pas d'étudier la nature de ces points critiques.

EXERCICE 4 Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par : $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1$

1. Déterminer les points critiques de f.
2. Calculer les dérivées partielles secondes de f.
3. Déterminer la nature des points critiques de f (minimum local, maximum local ou point selle).

EXERCICE 5 Idem avec la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

EXERCICE 6 Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x,y) = x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x + y.$$
On considère la surface d'équation
$$z = f(x,y).$$

1. Calculer les dérivées partielles premières de f.
2. Déterminer le point B de la surface correspondant au point
$$A(1, -1).$$
3. Établir, en justifiant, une équation du plan tangent à la surface en B.