Soit une fonction définie par $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y + 10$. Quelle est la nature de ses points critiques ?

1) On calcule son gradient.

$$\nabla(f) = \begin{bmatrix} 2x + y - 3 \\ x + 2y - 6 \end{bmatrix}$$

2) On recherche les endroits des points critiques.

Un point est critique ssi $\nabla(f) = \overrightarrow{0}$. Donc on résout $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$

Cela donne : $\begin{cases} y = 3 - 2x \\ x + 2(3 - 2x) = 6 \end{cases}$ puis $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ -3x = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} y = 3 \\ x = 0 \end{cases}$

Ici f n'admet qu'un seul point critique, c'est en $A(0;3)$

3) On forme la matrice hessienne puis on l'exprime en chaque point critique.

$H_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ c'est ici une matrice constante. Elle est symétrique.

4) On forme le polynôme caractéristique de cette matrice.

Il est défini par $P_H(\lambda) = det(H - \lambda.I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1$

5) On recherche les racines du polynôme caractéristique aussi appelée valeurs propres de H.

$P_H(\lambda) = 0$ ssi $(2-\lambda)^2 - 1 = 0$ ssi $(2 - \lambda - 1)(2 - \lambda + 1) = 0$ ssi $(1 - \lambda)(3 - \lambda + 1) = 0$
donc $\lambda = 1$ ou $\lambda = 2$

6) On détermine la nature éventuelle du point critique.

Puisque les deux valeurs propres sont positives, le point critique est un minimum.