

Rappel pour une fonction d'une seule variable

Exemple : $f(x) = x^2 + 3x - 4$.

Lorsque la fonction est dérivable en a , une équation de la **tangente en a** est $y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$

Exemple :

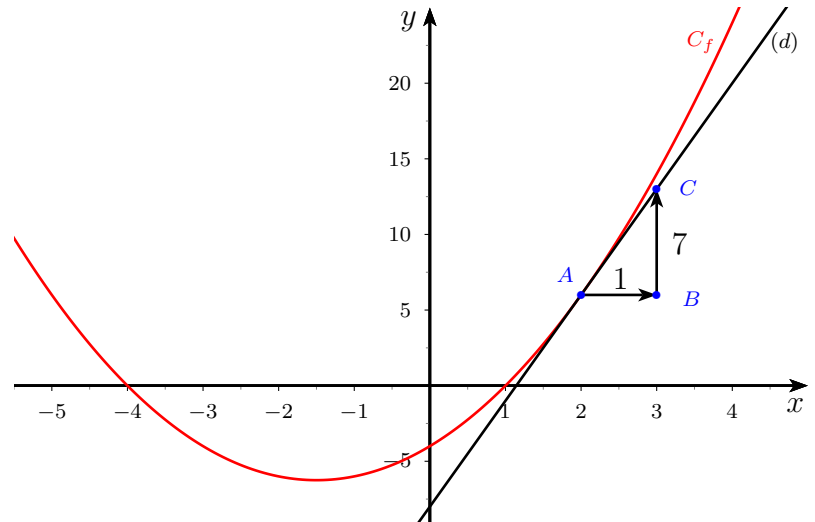
avec $f(x) = x^2 + 3x - 4$ et $a = 2$

cela donne $f'(x) = 2x + 3$ donc $f'(2) = 7$,

par ailleurs $f(2) = 6$

donc $y = 7(x - 2) + 6$

c'est à dire $y = 7x - 8$



La **formule de Taylor**, est $f(x) = f(a) + \sum_{n=1}^N \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n + o(x - a)^n$

A l'ordre 2, en $a = 2$, cela donnerait $f(x) = f(2) + (x - 2)f'(2) + (x - 2)^2 \frac{f''(2)}{2} + o(x - 2)^2$
or on a déjà $f(2) = 6$, $f'(2) = 7$ et on calcule $f''(x) = 2$ donc $f(x) = 6 + (x - 2) \times 7 + (x - 2)^2 + o(x - 2)^2$
C'est à dire $f(x) = 7x - 8 + (x - 2)^2 + o(x - 2)^2$ on retrouve dans $7x - 8$ la partie relative à la tangente.

La différence entre $f(x)$ et $(7x - 8)$ est $(x - 2)^2 + o(x - 2)^2$ qui est toujours positive car $+o(x - 2)^2$ est négligeable devant $(x - 2)^2$ donc C_f reste au dessus de sa tangente.

Finalement, si la dérivée seconde n'est pas nulle c'est son signe qui permet de connaître la convexité de la courbe au voisinage de a .

Lorsque la dérivée s'annule (mais que la dérivée seconde ne s'annule pas) on a :

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2} (x - a)^2 + o(x - a)^2$$

Donc :

- si $f^{(2)}(a) > 0$ alors localement : $f(x) > f(a)$ ce qui signifie qu'en a la fonction f admet un minimum local.
- si $f^{(2)}(a) < 0$ alors localement : $f(x) < f(a)$ ce qui signifie qu'en a la fonction f admet un maximum local.
- si $f^{(2)}(a) = 0$ alors on ne peut rien affirmer directement.

Pour une fonction de deux variables

La formule de Taylor s'écrit alors à l'ordre 2 :

$$f(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + \frac{1}{2} \left[f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + f_{yy}(a,b)(y-b)^2 \right] + o((x-a)^2 + (y-b)^2)$$

que l'on peut écrire plus simplement :

$$f(x,y) = f(a,b) + \nabla f(a,b) \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}^T H_f(a,b) \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix} + o(\|(x-a, y-b)\|^2)$$

où les produit sont des produits matriciels, T signifie 'transposée' et $H_f(a,b)$ est la matrice hessienne de f au point $A(a,b)$. Cette matrice est $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$, on l'évalue alors en (a,b)

Si on peut utiliser le théorème de Schwarz alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ donc cette matrice est symétrique. Elle est diagonalisable dans \mathbb{R} et il existe une base orthonormée de vecteurs propres.

Lorsque **les dérivées partielles premières s'annulent en même temps**, c'est à dire quand le gradient ∇ est nul, il ne reste que : $f(x,y) = f(a,b) + \frac{1}{2}u^T H_f(a,b)u + o(\|u\|^2)$ avec $u = \begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}$

Pour chaque vecteur propre X de H_f alors il existe une valeur propre λ pour laquelle $H_f X = \lambda X$ donc $X^T H_f(a,b) X = \lambda \|X\|^2$

Tout vecteur u se décompose dans la base de vecteurs propres (X_1, X_2) sous la forme $u = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2$ et

$$u^T H_f(a,b) u = (\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2)^T H_f(a,b) (\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) = \lambda_1 \alpha_1^2 + \lambda_2 \alpha_2^2$$

Le dernier terme de la formule de Taylor étant négligeable devant $u^T H_f(a,b) u$, on peut affirmer que :

- Lorsque les deux valeurs propres sont strictement positives, on a : $u^T H_f(a,b) u > 0$ pour tout u donc f admet en $A(a,b)$ un minimum local
- Lorsque les deux valeurs propres sont strictement négatives, on a : $u^T H_f(a,b) u < 0$ pour tout u donc f admet en $A(a,b)$ un maximum local
- Lorsque les deux valeurs propres sont de signes contraires alors f admet en (a,b) un point col.
- Lorsqu'au moins une des deux valeurs propres est nulle on ne peut pas conclure avec cette méthode.