Un champ scalaire est une fonction de plusieurs variables qui associe un seul nombre (ou scalaire) à chaque point de l'espace.

Exemple : $f(x,y) = x + y$.

Un champ vectoriel est une fonction qui associe un vecteur à chaque point de plan / de l'espace.

Exemple : $f(x,y) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xy \\ x+y \end{bmatrix}$

Pour dériver une fonction de plusieurs variables par rapport à l'une d'elles il suffit de considérer que toutes les autres sont des constantes. On note $\dfrac{\partial f}{\partial x} = f'_x = f'_1 = D_1 f$ pour la dérivée de f par rapport à la variable x. On la nomme dérivée partielle par rapport à x.

Exemple : : Si $f(x,y) = x^2y + y$ alors $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xy$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 1$

On définit l'opérateur nabla noté ∇ par $\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$ si on utilise une fonction de deux variable x et y. Plus généralement $\nabla(f) = [\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}]^T$ (transposée) lorsqu'il y a n variables.

Le gradient d'un champ scalaire produit un champ vectoriel. Noté $\text{grad}(f)$ il est défini par le vecteur de composantes $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$. On peut le noter $\nabla(f)$.

Exemple : : Si $f(x,y) = x^2y + y$ alors $\text{grad}(f) = \begin{bmatrix} 2xy \\ x^2+1 \end{bmatrix}$

La différentielle de f est l'accroissement infinitésimal de f, notée df, si f dépend de deux variables x et y alors elle est définie par $dx = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy = \text{grad}(f) \cdot dl$ (produit scalaire) où $dl = \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$

Exemple : : Si $f(x,y) = x^2y + y$ alors $df = 2xy\ dx + (x^2+1)\ dy$

La dérivée de f dans la direction donnée par le vecteur unitaire $\vec{u}$, appelée dérivée directionnelle selon $\vec{u}$ est égale à $\text{grad}(f) \cdot \vec{u}$

Exemple : La dérivée de f définie par $f(x,y)$ dans le sens $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ est $f'_{\vec{u}} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + 2\dfrac{\partial f}{\partial y}$

Puisque $f'_{\vec{u}} = grad(f) \cdot \vec{u} = ||grad(f)|| \times ||\vec{u}|| \times \cos(grad(f),\vec{u})$, la direction dans laquelle la variation de f sera la plus importante est obtenue lorsque $\cos(grad(f),\vec{u})$ vaut 1 donc lorsque $\overrightarrow{u}$ est dans le sens du gradient. Le gradient de f est la direction dans laquelle f évolue le plus rapidement.

La ligne de niveau k d'un champ scalaire f est l'ensemble des points de coordonnées (x,y) tels que $f(x,y) = k$.

Exemple : Si $f(x,y) = x^2 + y^2$ alors la ligne de niveau 25 est l'exemple des points de coordonnées (x,y) tels que $f(x,y) = 25$ c'est à dire $x^2 + y^2 = 25$, on reconnaît l'équation cartésienne du cercle de centre O et de rayon 5.

Le long de cette ligne de niveau la fonction f n'évolue par donc on aura $df = 0$. Or $df = \text{grad}(f) \cdot (dl)$ donc si on se déplace sur la ligne de niveau alors ce produit scalaire est nul donc en tout point, le gradient de f est orthogonal à la ligne de niveau.

On considère la surface S définie par l'équation $z = f(x,y)$. Elle correspond à la ligne de niveau 0 de la fonction φ définie par $\varphi(x,y,z) = z - f(x,y)$

grad(φ) est alors un vecteur orthogonal à la surface S or il a pour composantes :
grad(φ) $= [\frac{\partial\varphi}{\partial x},\frac{\partial\varphi}{\partial y},\frac{\partial\varphi}{\partial z}]^T = [-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y},1]^T$ (transposée)

Le plan tangent à S en $M_0\Big(x_0,y_0,f(x_0,y_0)\Big)$ a donc pour vecteur normal $grad(\varphi)$ et passe par M_0, c'est l'ensemble des points (x,y,z) vérifiant $\overrightarrow{M_0M} \cdot grad(\varphi) = 0$

Exemple : : Si $f(x,y) = x^2y$. On considère la surface définie par $z = f(x,y)$
On forme $\varphi(x,y,z) = z - x^2y$ donc S est donc définie par la ligne de niveau 0 : $\varphi(x,y,z) = 0$
Si on s'intéresse au point de la surface défini par $x = 2$ et $x = 1$ alors sa cote $z = f(2,1) = 4$, le point de la surface a pour coordonnées $M_0(2,1,4)$

Par ailleurs $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = 2xy$ et $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = x^2$ donc en ce point M_0 on a : grad $\varphi = \begin{bmatrix} -\frac{\partial\varphi}{\partial x}_{(2,1)} \\ -\frac{\partial\varphi}{\partial y}_{(2,1)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$

Il est normal au plan tangent à S en M_0, le plan a donc pour équation $\overrightarrow{M_0M} \cdot \nabla(\varphi) = 0$

C'est à dire $\begin{bmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z-4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ puis $-4(x-2) - 4(y-1) + (z-4) = 0$ et enfin $-4x - 4y + z + 8 = 0$
Le plan tangent à la surface S en $M_0(2,1,4)$ a pour équation $4x + 4y - z - 8 = 0$

On appelle point critique de f les points pour lesquels grad$(f) = \overrightarrow{0}$

Exemple : Si $f(x,y) = x^2 + y^2$ alors grad$(f) = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$, on résout alors : $x = 0$ et $y = 0$ donc seul (0,0) est un point critique.

On définit les dérivées partielles secondes les dérivées partielles des dérivées premières. Si f est une fonction de x et de y alors il y avait deux dérivées premières donc quatre dérivées partielles secondes :
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$.

Exemple : : si $f(x,y) = x^2y + y$ alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial\ 2xy}{\partial x} = 2y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial\ x^2+1}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial\ 2xy}{\partial y} = 2x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial\ x^2+1}{\partial y} = 2x$$

Le théorème de Schwarz nous indique que si les dérivées $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ sont consinues alors elles sont égales. Ce qui permet de réduire le nombre de calculs à réaliser.

On appelle matrice hessienne de f la matrice peuplée par les dérivées partielles secondes
$H(f) = \left[\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)_{i,j}\right]$

Exemple : : si $f(x,y) = x^2y + y$ alors $H(f) = \begin{bmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 0 \end{bmatrix}$

Donner la nature des points critiques de f signifie savoir s'ils correspondent à des minima locaux, des maxima locaux ou des points 'col'. Un point est un point col s'il correspond à un maximum local dans une direction mais un minimum local dans une autre direction.

Si on considère une surface S définie par $z = f(x,y)$, $M_0(x_0,y_0)$ un point critique de f et $H_{M_0}(f)$ la matrice hessienne en ce point alors si cette matrice admet des valeurs propres (éventuellement égales) ce point est un

- minimum local si les valeurs propres sont positives
- maximum local si les valeurs propres sont négatives
- point col si les valeurs propres sont de signes contraires

si la matrice n'a pas de valeurs propres réelles alors il faudra changer de méthode pour qualifier les points critiques.

Pour mémoire, les valeurs propres de la matrice A sont les racines du polynôme caractéristique : $P_A(x) = det(A - x.I)$
Dans le cas d'une matrice hessienne correspondant à $f(x,y)$, ce polynôme est du second degré. Son discriminant permet de savoir s'il a des racines. Il a pour forme $x^2 + \alpha x + \beta$

Exemple : : Si $f(x,y) = (x-1)^2 + 2y^2$ alors $\nabla(f) = \begin{bmatrix} 2(x-1) \\ 4y \end{bmatrix}$ donc $\nabla(f) = \overrightarrow{0}$ ssi $x = 1$ et $y = 0$.
Le seul point critique est $M_0(1,0)$
Les dérivées partielles secondes sont $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4$
La matrice hessienne en ce point est $H_{M_0}(f) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$
$P_H(x) = det(H - xI) = (2-x)(4-x) - 0 = (x-4)(x-2)$ il y a deux valeurs propres 2 et 4, des nombres tous les deux positifs., il s'agit dont d'un minimum pour f