Protocole : étudier la nature des points critiques.

Le protocole pour étudier la nature des points critiques d'une fonction de classe C^2 peut être le suivant :

1. Calculer les dérivées partielles premières, former le gradient ∇.
2. Résoudre $\nabla(f) = \overrightarrow{0}$. Les solutions sont les endroits des points critiques (a,b).
3. Calculer les dérivées partielles secondes, former la matrice hessienne H_f
4. Pour chaque point critique (a,b)
   (a) Evaluer la matrice hessienne en (a,b). On aura une matrice symétrique à coefficients réels constants.
   (b) Former le polynôme caractéristique de cette matrice : $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda.I)$
   (c) Résoudre $P_A(\lambda) = 0$. Les solutions sont appelées valeurs propres λ_i
   (d) Conclure ainsi :
      - Si les valeurs propres sont toutes strictement positives alors f admet en (a,b) un minimum local.
      - Si les valeurs propres sont toutes strictement négatives alors f admet en (a,b) un maximum local.
      - Si les valeurs propres ne sont pas toutes du même signe alors f admet en (a,b) un point col.
      - Si au moins une des valeurs propres est nulle alors on ne peut pas donner la nature du point critique de cette façon.