Corrigé

Soit $A(1;2;3)$, $B(5;1;0)$, $\vec{u} = \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{bmatrix}0\\3\\1\end{bmatrix}$

1. Calculer $AB$.

   $AB = \sqrt{(5-1)^2 + (1-2)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{16+1+9} = \sqrt{26}$

2. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$

   $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 3 + 2 \times 0 + 0 \times 1 = 3$

3. Calculer $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

   $$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{bmatrix}2\times 1 - 0\times 0\\3\times 0 - 1\times 1\\1\times 0 - 2\times 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-1\\-6\end{bmatrix}$$

4. Calculer $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

   $$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix}1 & 3 & 0\\2 & 0 & 3\\0 & 1 & 1\end{vmatrix}$$
   $$= 1\times 0\times 1 + 2\times 1\times 0 + 0\times 3\times 3 - 0\times 0\times 0 - 1\times 3\times 1 - 1\times 2\times 3 = -9$$

5. Établir une équation cartésienne du plan $(P)$ passant par $C(3;2;1)$ et de vecteur normal $\vec{u}$

   $M(x;y;z) \in (P)$ ssi $\overrightarrow{CM}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux

   ssi $\begin{bmatrix}x-3\\y-2\\z-1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} = 0$

   ssi $(x-3)\times 1 + (y-2)\times 2 + (z-1)\times 0 = 0$

   ssi $x + 2y = 7$

6. Établir une équation cartésienne du plan $ABC$

   $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix} \neq \vec{0}$ donc $A$, $B$ et $C$ forment un plan dont l'équation cartésienne a pour forme $2x + 2y + 2z + d = 0$

   $A \in (ABC)$ donc $2 + 4 + 6 + d = 0$ donc $d = -12$.

   Finalement une équation est $2x + 2y + 2z - 12 = 0$ ou plus simplement $x + y + z = 6$

Corrigé

Soit $A(5;1;0)$, $B(1;2;3)$, $\vec{u}=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$, $\vec{v}=\begin{bmatrix}0\\3\\1\end{bmatrix}$ et $\vec{w}=\begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix}$

1. Calculer $AB$.

   $AB=\sqrt{(1-5)^2+(2-1)^2+(3-0)^2}=\sqrt{16+1+9}=\sqrt{26}$

2. Calculer $\vec{u}\cdot\vec{v}$

   $\vec{u}\cdot\vec{v}=1\times 0+2\times 3+0\times 1=6$

3. Calculer $\vec{u}\wedge\vec{v}$.

   $$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{bmatrix}1\times 2-0\times 3\\0\times 0-1\times 1\\1\times 3-0\times 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-1\\3\end{bmatrix}$$

4. Calculer $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$.

   $$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix}1&0&3\\2&3&0\\0&1&1\end{vmatrix}$$
   $$=1\times 3\times 1+2\times 1\times 3+0\times 0\times 0-0\times 3\times 3-1\times 0\times 1-1\times 2\times 0=9$$

5. Établir une équation cartésienne du plan $(P)$ passant par $C(3;2;1)$ et de vecteur normal $\vec{u}$

   $M(x;y;z)\in(P)$ ssi $\overrightarrow{CM}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux

   $$\text{ssi }\begin{bmatrix}x-3\\y-2\\z-1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}=0$$

   ssi $(x-3)\times 1+(y-2)\times 2+(z-1)\times 0=0$

   ssi $x+2y=7$

6. Établir une équation cartésienne du plan $ABC$

   $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{bmatrix}-2\\4\\-2\end{bmatrix}\neq\vec{0}$ donc $A$, $B$ et $C$ forment un plan dont l'équation cartésienne a pour forme $-2x+4y-2z+d=0$

   $A\in(ABC)$ donc $3-4+1+d=0$ donc $d=0$.

   Finalement une équation est $-2x+4y-2z=0$ ou plus simplement $x-2y+z=0$