$\boxed{\text{Minitest N°03 ALT}} \longrightarrow \boxed{\text{Corrigé}}$

Soit $f(x,y) = (x^2 + y^2 - x - 2y)e^{-x}$

a) Calculer $\nabla f(x,y)$

$$\nabla f(x,y) = \begin{bmatrix} (2x-1)e^{-x} + (x^2+y^2-x-2y)e^{-x} \times (-1) \\ (2y-2)e^{-x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-x^2-y^2+3x+2y-1)e^{-x} \\ (2y-2)e^{-x} \end{bmatrix}$$

b) Montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2e^{-x}(1-y)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = (-1)e^{-x}(2y-2) = (2-2y)e^{-x} = 2e^{-x}(1-y)$$

c) Montrer que $\nabla f(x,y) = \overrightarrow{0}$ ssi $y = 1$ et $(x = 0$ ou $x = 3)$

$\nabla f(x,y) = \overrightarrow{0}$ ssi $\begin{bmatrix} (-x^2-y^2+3x+2y-1)e^{-x} \\ (2y-2)e^{-x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

ssi $(-x^2-y^2+3x+2y-1) = 0$ et $(1-y) = 0$ car $e^{-x} \neq 0$

ssi $-x^2-y^2+3x+2y-1 = 0$ et $y = 1$

ssi $-x^2-1+3x+2-1 = 0$ et $y = 1$

ssi $3x - x^2 = 0$ et $y = 1$

ssi $x(3-x) = 0$ et $y = 1$

ssi $(x = 0$ ou $x = 3)$ et $y = 1$

d) Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à la surface d'équation $z = f(x,y)$ au point de coordonnées $(1,2)$

La surface d'équation $z = f(x,y)$ est la ligne de niveau 0 de la fonction $\varphi(x,y,z) = z - f(x,y)$

Le gradient de φ en $(1,2)$ est un vecteur normal à S en $(1,2)$ donc au plan tangent en $(1,2)$

or $\nabla\varphi(x,y) = \begin{bmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x} \\ -\frac{\partial f}{\partial y} \\ 1 \end{bmatrix}$ En $(1,2)$, on a $\nabla\varphi(1,2) = \begin{bmatrix} -e^{-1} \\ -2e^{-1} \\ 1 \end{bmatrix}$

Une équation du plan recherché est alors de la forme : $-e^{-1}x - 2e^{-1}y + z + d = 0$

Puisque $z = f(1,2) = 0$ ce plan passe par $(1,2,0)$ donc $-e^{-1} - 4e^{-1} + 0 + d = 0$ donc $d = -5e^{-1}$

Finalement une équation du plan tangent à (S) en $(1,2)$ est : $-e^{-1}x - 2e^{-1}y + z - 5e^{-1} = 0$

En multipliant le tout par $-e$ cela donne $\boxed{x + 2y - ez = 5}$