

Soit f définie sur \mathbb{R}^2 par $f(x,y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$.

[0.5pt] 1. Déterminer la différentielle $d(f)$.

$$df = (6x^2 + 6y)dx + (6x - 6y)dy$$

[1pt] 2. Établir une équation du plan tangent à la surface (S) définie par $z = f(x,y)$ en $(-0,5; -1)$.

Notons $\varphi(x,y,z) = z - f(x,y)$,

la surface S définie par $z = f(x,y)$ est la ligne de niveau 0 de la fonction φ

or le gradient de φ est orthogonal à toute ligne de niveau de φ donc le gradient de φ est un vecteur normal de chaque plan tangent à (S) , notamment celui qui passe par $(-0,5; -1; f(-0,5; -1))$

$$\text{On a : } \text{grad}\varphi = \begin{bmatrix} -(6x^2 + 6y) \\ -(6x - 6y) \\ 1 \end{bmatrix} \text{ donc en } (-0,5; -1) \text{ cela donne } \vec{n} = \begin{bmatrix} 4,5 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Une équation du plan tangent a pour forme $4,5x - 3y + z + d = 0$ où d reste à déterminer.

$$\text{En } x = -0,5 \text{ et } y = -1, \text{ on a } z = f(-0,5; -1) = -\frac{1}{4} + 3 - 3 + 2 = \frac{7}{4} = 1,75,$$

le plan passe par $(-0,5; -1; 1,75)$

$$\text{donc } 4,5 \times (-0,5) - 3 \times (-1) + 1,75 + d = 0 \text{ donc } d = -2,5$$

Finalement une équation du plan tangent à la surface (S) définie par $z = f(x,y)$ en $(-0,5; -1)$ est $4,5x - 3y + z - 2,5 = 0$

[1pt] 3. Résoudre $\text{grad}(f) = \vec{0}$.

$$\text{grad}(f) = \begin{bmatrix} 6x^2 + 6y \\ 6x - 6y \end{bmatrix} \text{ donc } \text{grad}(f) = \vec{0} \text{ ssi } \begin{cases} 6x^2 + 6y = 0 \\ 6x - 6y = 0 \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} x^2 + y = 0 \\ x = y \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} x^2 + x = 0 \\ x = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x+1) = 0 \\ x = y \end{cases} \text{ donc } x = 0 \text{ et } y = 0 \text{ ou } x = -1 \text{ et } y = -1$$

Il y a deux points critiques $(-1; -1)$ et $(0; 0)$

[0.5pt] 4. Déterminer la matrice hessienne de f en $(x; y)$ notée $H(x,y)$

$$\text{On calcule } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6 \text{ par ailleurs } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6 \text{ donc } H(f) = \begin{bmatrix} 12x & 6 \\ 6 & -6 \end{bmatrix}$$

[1pt] 5. Montrer que f admet en $(-1; -1)$ un maximum local

$$\text{En } (-1; -1), \text{ on a } H(f) = \begin{bmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -6 \end{bmatrix}.$$

$$\text{On a donc } P_H(\lambda) = \begin{vmatrix} -12 - \lambda & 6 \\ 6 & -6 - \lambda \end{vmatrix} = (12 + \lambda)(6 + \lambda) - 36 = \lambda^2 + 18\lambda + 36$$

Son discriminant est $\Delta = 180$ et ses racines sont $\lambda_1 \approx -2,3 < 0$ et $\lambda_2 \approx -15,7 < 0$

Puisque les deux valeurs propres sont négatives, ce point critique est un maximum local.

[1pt] 6. En étudiant les fonctions $f_1(x) = f(x,x)$ et $f_2(x) = f(x, -x)$, montrer qu'en $(0; 0)$ la fonction f admet un point col.

$$f_1(x) = f(x,x) = 2x^3 + 3x^2 + 2 \text{ donc } f_1'(x) = 6x^2 + 6x = 6x(x+1)$$

$$\text{et } f_2(x) = f(x, -x) = 2x^3 - 9x^2 + 2 \text{ donc } f_2'(x) = 6x^2 - 18x = 6x(x-3)$$

On a donc

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$		
$f_1'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f_1(x)$		↗ ↘				

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$		
$f_2'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f_2(x)$		↗ ↘				

Suivant $(x; x)$ c'est à dire dans la direction $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, la fonction f admet un minimum en $(0; 0)$ et suivant

$(x; -x)$ donc dans la direction $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, f admet un maximum en $(0; 0)$,

il s'agit donc bien d'un point col.

