Résolution de l'équation

$$y' + 3y = x + 8e^{-3x}$$

Etape 1 : On recherche toutes les solutions de l'équation homogène associée.
$a = 1$ et $b = 3$ donc $F'(x) = \dfrac{b}{a} = 3$
Une primitive est alors $F(x) = 3x + 0$
Toutes les solutions sont les $y(x) = Ce^{-F(x)} = Ce^{-3x}$ où C est une constante réelle quelconque.

Etape 2 : On recherche une solution particulière de l'équation complète.
Le second membre est une somme de deux fonctions x et $8e^{-3x}$ donc on procède par **superposition**
• On s'occupe de $y' + 3y = x$
Le second membre est une fonction affine
donc on recherche une solution particulière y_{p1} sous la forme d'une fonction affine.

Dans ce cas $y_{p1}(x) = Ax + B$ donc $y'_{p1}(x) = A$

L'équation devient : $A + 3(Ax + B) = x + 0$ puis $3Ax + A + 3B = x + 0$
On peut alors identifier, les termes en x ensemble et les termes constants ensemble

$$\begin{cases} 3A &= 1 \\ A + 3B &= 0 \end{cases}$$

donc $A = \frac{1}{3}$ puis $B = \frac{-1}{9}$

Une solution particulière de l'équation avec second membre est alors $y_{p1}(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}$

• On s'occupe de $y' + 3y = 8e^{-3x}$
Le second membre est une fonction exponentielle mais elle est présente dans les solutions de SSM, on décide d'utiliser la méthode de variation de la constante
donc on recherche une solution particulière y_{p2} sous la forme d'une fonction affine.

Dans ce cas $y_{p2}(x) = C(x)e^{-3x}$ donc $y'_{p2}(x) = C'(x)e^{-3x} - 3C(x)e^{-3x}$

L'équation devient : $C'(x)e^{-3x} - 3C(x)e^{-3x} \ + \ 3C(x)e^{-3x} = 8e^{-3x}$ puis $C'(x)e^{-3x} = 8e^{-3x}$ et enfin $C('x) = 8x$
Donc en intégrant on trouve $C(x) = 4x^2 + 0$
Une solution particulière de l'équation avec second membre est alors $y_{p2}(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-3x}$

• Par superposition, une solution particulière de l'équation avec second membre est alors

$$y_p(x) = y_{p1}(x) + y_{p2}(x)$$

C'est à dire $y_p(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{9} \ + \ 4x^2e^{-3x}$

Etape 3 : y est une solution de l'équation équivaut à $y - y_p$ est une solution de (SSM)
donc toutes les solutions de l'équation complète sont les sommes : $y(x) = Ce^{-3x} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9} \ + \ 4x^2e^{-3x}$
où C est une constante réelle quelconque.