Le système à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} x & +2y & +3z & = & 10 \\ 2x & +3y & +z & = & 13 \\ 3x & +y & -z & = & 10 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Méthode : substitutions}}$

On isole x dans la première équation :

$$\begin{cases} x = & 10-2y-3z \\ 2x & +3y & +z & = & 13 \\ 3x & +y & -z & = & 10 \end{cases}$$

On reporte dans les deux autres équations, cela donne :

$$\begin{cases} x & & & = & 10-2y-3z \\ 2(10-2y-3z) & +3y & +z & = & 13 \\ 3(10-2y-3z) & +y & -z & = & 10 \end{cases}$$

On simplifie

$$\begin{cases} x & = & 10-2y-3z \\ -y-5z & = & -7 \\ -5y-10z & = & -20 \end{cases}$$

On isole maintenant y dans la seconde équation

$$\begin{cases} x & = & 10-2y-3z \\ y & = & 7-5z \\ -5y-10z & = & -20 \end{cases}$$

On reporte dans la 3ème équation :

$$\begin{cases} x & = & 10-2y-3z \\ y & = & 7-5z \\ -5(7-5z)-10z & = & -20 \end{cases}$$

On simplifie :

$$\begin{cases} x & = & 10-2y-3z \\ y & = & 7-5z \\ 15z & = & 15 \end{cases}$$

On obtient la valeur de z, que l'on reporte dans les équations 1 et 2

$$\begin{cases} x & = & 7-2y \\ y & = & 2 \\ z & = & 1 \end{cases}$$

On obtient alors y que l'on reportant dans le première équation

$$\begin{cases} x & = & 3 \\ y & = & 2 \\ z & = & 1 \end{cases}$$

Méthode : pivot de Gauss

Le système à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} x & +2y & +3z & = & 10 \\ 2x & +3y & +z & = & 13 \\ 3x & +y & -z & = & 10 \end{cases}$$

On détermine les coefficients à utiliser pour faire disparaitre les x des deux dernières lignes par différences :

$$\begin{cases} x & +2y & +3z & = & 10 & (\times 2) & 2x & +4y & +6z & = & 20 & (\times 3) & 3x & +6y & +9z & = & 30 \\ 2x & +3y & +z & = & 13 & (\times 1) & 2x & +3y & +z & = & 13 & & & & & & \\ 3x & +y & -z & = & 10 & & & & & & & (\times 1) & 3x & +y & -z & = & 10 \end{cases}$$

Cela donne :

$$\begin{cases} x & +2y & +3z & = & 10 & L_1 = \text{pivot}_1 \\ & -y & -5z & = & -7 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ & -5y & -10z & = & -20 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases}$$

On travaille avec les lignes 2 et 3 :

$$\begin{cases} x & +2y & +3z & = & 10 & & & & & \\ & -y & -5z & = & -7 & (\times -5) & 5y & +25z & = & 35 \\ & -5y & -10z & = & -20 & (\times -1) & 5y & +10z & = & 20 \end{cases}$$

Cela donne :

$$\begin{cases} x & +2y & +3z & = & 10 & \text{conservée} \\ & -y & -5z & = & -7 & L_2 = \text{pivot}_2 \\ & & -15z & = & -15 & L_3 \leftarrow -1L_3 + 5L_2 \end{cases}$$

C'est un système de Cramer car on peut trouver un z puis un y unique et enfin un x unique.

On remplace z par sa valeur dans la ligne 2.

$$\begin{cases} x & +2y & +3z & = & 10 & \\ & -y & -5z & = & -7 & ↰ \text{ on reporte} \\ & & z & = & 1 & \text{on a divisé par } -15 \end{cases}$$

On remplace y et z par leurs valeurs dans la ligne 1.

$$\begin{cases} x & +2y & +3z & = & 10 & ↰ \text{ on reporte} \\ & y & & = & 2 & \\ & & z & = & 1 & \end{cases}$$

On a obtenu les valeurs de x, y et z.

$$\begin{cases} x & & & = & 3 \\ & y & & = & 2 \\ & & z & = & 1 \end{cases}$$

$\boxed{\text{Méthode : matriciellement}}$

Le système à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} x & +2y & +3z & = & 10 \\ 2x & +3y & +z & = & 13 \\ 3x & +y & -z & = & 10 \end{cases}$$

Il s'écrit matriciellement : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \\ 10 \end{bmatrix}$

Soit $AX = B$

Le déterminant de A est $\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 6 + 6 - 27 - 1 + 4 = -15 \neq 0$

La matrice A est donc inversible, calculons A^{-1}

$A^{-1} = \dfrac{1}{det(A)} \times \left(comA\right)^T$

or $com(A) = \begin{bmatrix} +(-4) & -(-5) & +(-7) \\ -(-5) & +(-10) & -(-5) \\ +(-7) & -(-5) & +(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 5 & -7 \\ 5 & -10 & 5 \\ -7 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

donc $\left(comA\right)^T = \begin{bmatrix} -4 & 5 & -7 \\ 5 & -10 & 4 \\ -7 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

donc $A^{-1} = \dfrac{1}{det(A)} \times \begin{bmatrix} -4 & 5 & -7 \\ 5 & -10 & 4 \\ -7 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

Et enfin $X = A^{-1} \times B$ donc $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \dfrac{1}{-15} \times \begin{bmatrix} -4 & 5 & -7 \\ 5 & -10 & 5 \\ -7 & 5 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \\ 10 \end{bmatrix} = \dfrac{-1}{15} \times \begin{bmatrix} -45 \\ -30 \\ -15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

donc $x = 3, \quad y = 2 \quad$ et $\quad z = 3$

Méthode : avec les déterminants

Le système à résoudre est le suivant :

$$\begin{cases} x & +2y & +3z & = & 10 \\ 2x & +3y & +z & = & 13 \\ 3x & +y & -z & = & 10 \end{cases}$$

Il s'écrit matriciellement : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \\ 10 \end{bmatrix}$

Le déterminant du système est $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3+6+6-27-1+4 = -15 \neq 0$

C'est donc un système de Cramer et on a :

$$x = \frac{1}{-15} \times \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 \\ 13 & 3 & 1 \\ 10 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-45}{-15} = 3 \qquad y = \frac{1}{-15} \times \begin{vmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 2 & 13 & 1 \\ 3 & 10 & -1 \end{vmatrix} = \frac{-30}{-15} = 2$$

$$z = \frac{1}{-15} \times \begin{vmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 2 & 3 & 13 \\ 3 & 1 & 10 \end{vmatrix} = \frac{-15}{-15} = 1$$