Corrigé

Première partie

1. C	5. A	9. D
2. A	6. C	10. C
3. A	7. C	11. D
4. B	8. C	12. D

Seconde partie

EXERCICE 1 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 - 5x + 7)e^x$.

1. Etudier le signe de $x^2 - 5x + 7$. 1pt

$x^2 - 5x + 7$ a pour discriminant $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 7 = 25 - 28 = -3 < 0$, ce trinôme garde donc un signe constant or pour $x = 0$ il vaut 7 qui est strictement positif donc il sera toujours strictement positif.

2. En déduire celui de f. 0.5pt

Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = (x^2 - 5x + 7)e^x$ et $x^2 - 5x + 7 > 0$ et $e^x > 0$

Cela permet d'affirmer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0$

3. Que cela signifie-t-il graphiquement ? 0.5pt

Graphiquement cela signifie que la courbe représentant f reste au dessus de l'axe des abscisses.

4. Montrer que $f'(x) = (x^2 - 3x + 2)e^x$. 1pt

g est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (2x - 5)e^x + (x^2 - 5x + 7)e^x = (2x - 5 + x^2 - 5x + 7)e^x = (x^2 - 3x + 2)e^x$

5. Étudier le signe de f' et établir le tableau des variations de f. 1pt

Occupons nous du signe de $(x^2 - 3x + 2)$, son discriminant est $\delta = 9 - 8 = 1$, ses racines sont $x_1 = \dfrac{-(-3) - 1}{2} = \dfrac{3 - 1}{2} = \dfrac{2}{2} = 1$ et $x_2 = \dfrac{-(-3) + 1}{2} = \dfrac{3 + 1}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$
donc $(x^2 - 3x + 2) = (x - 1)(x - 2)$

On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (x - 1)(x - 2)e^x$

On a alors la possibilité d'établir le tableau de signe de f' puis des variations de f

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$f(2)$	$\nearrow$	

6. Montrer que f admet un minimum local et en donner la valeur exacte. 0.5pt

f est continue sur $\mathbb{R}$,

et strictement décroissante sur $[1;2]$ puis strictement croissante sur $[2;+\infty[$

donc f admet en $x=2$ un minimum local dont la valeur est

$f(2) = (2^2 - 5\times 2 + 11)e^2 = e^2$

7. Établir une équation de la tangente en 0 à la courbe représentant f. 1pt

Une équation de la tangente en 0 à la courbe représentant f a pour forme :

$$y = f'(0)\times(x-0)+f(0)$$

or $f(0)=7$ (énoncé) et $f'(0)=2$ (question 4) donc $y=2x+7$

EXERCICE 2 Un café propose des boissons chaudes et des boissons froides, qui peuvent être servies en terrasse ou en salle.

On dispose des informations suivantes :

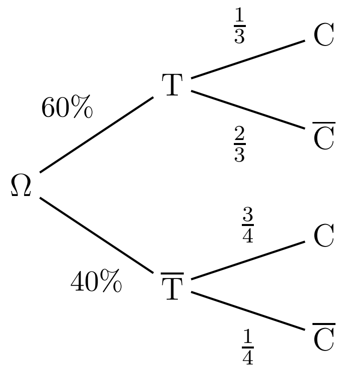
- $60\,\%$ des consommations sont servies en terrasse.
  Dans un tiers des cas, il s'agit d'une boisson chaude.
- $40\,\%$ des consommations sont servies en salle.
  Parmi elles, les trois quarts sont des boissons chaudes.

On s'intéresse à une consommation choisie au hasard, et on considère les évènements suivants :

T : il s'agit d'une consommation servie en terrasse.

C : il s'agit d'une boisson chaude.

1. Dresser un arbre pondéré représentant la situation. 1pt



2. Déterminer la probabilité $P(T \cap C)$. 0.5pt

On lit : $P(T \cap C) = 0{,}6 \times \dfrac{1}{3} = 0{,}2$. Cela correspond à 20%

3. Montrer que la probabilité que la consommation soit une boisson chaude est égale à $\frac{1}{2}$. 1pt

D'après la formule des probabilités totales, on a : $P(C) = P(T \cap C) + P(\overline{T} \cap C)$

On a donc : $P(C) = 0{,}2 + 0{,}4 \times \dfrac{3}{4} = 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5 = \dfrac{1}{2}$

4. Une boisson chaude vient d'être commandée. Un serveur déclare :

« Elle a davantage de chance d'être servie en salle qu'en terrasse ».

Le serveur a-t-il raison ? Justifier la réponse. 1pt

On calcule la probabilité que la boisson soit servie en salle sachant qu'elle est chaude : $P_C(\overline{T}) = \dfrac{P(C \cap \overline{T})}{P(C)} = \dfrac{0{,}4 \times \frac{3}{4}}{0{,}5} = \dfrac{0{,}3}{0{,}5} = 0{,}6$

Il y a donc 60% de chance qu'elle soit servie en salle donc plus de 50%

donc le serveur a raison.

5. Les évènements T et C sont-ils indépendants ? Justifier. 1pt

$P(C \cap T) = 0{,}2$ et $P(C) \times P(T) = 0{,}5 \times 0{,}6 = 0{,}3$ donc $P(C \cap C) \neq P(C) \times P(T)$ donc les évènements ne sont pas indépendants.

EXERCICE 3

On considère la suite définie par $U_{n+1} = \dfrac{1}{3}U_n + 8$ et $U_0 = 3$

1. Calculer les valeurs exactes des termes U_1 et U_2 de la suite. 1pt

On a : $U_{0+1} = \dfrac{1}{3}U_0 + 8$ donc $U_1 = \dfrac{1}{3} \times 3 + 8 = 1 + 8 = 9$

$U_{1+1} = \dfrac{1}{3}U_1 + 8$ donc $U_2 = \dfrac{1}{3} \times 9 + 8 = 3 + 8 = 11$

2. La suite est-elle arithmétique ? 0.5pt

On a : $U_1 - U_0 = 9 - 3 = 6$ et $U_2 - U_1 = 11 - 9 = 2$ donc $U_1 - U_0 \neq U_2 - U_1$ la suite n'est donc pas arithmétique.

3. La suite est-elle géométrique ? 0.5pt

On a : $\dfrac{U_1}{U_0} = \dfrac{9}{3} = 3$ et $\dfrac{U_2}{U_1} = \dfrac{11}{9}$ donc $\dfrac{U_1}{U_0} \neq \dfrac{U_2}{U_1}$ la suite n'est donc pas géométrique.

4. On pose $V_n = U_n - 12$

a. Montrer que la suite (Vn) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme. 1pt

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $V_{n+1} = U_{n+1} - 12$

donc $V_{n+1} = \left(\dfrac{1}{3} \times U_n + 8\right) - 12 = \dfrac{1}{3} \times U_n - 4$

donc $V_{n+1} = \dfrac{1}{3} \times (V_n + 12) - 4 = \dfrac{1}{3} \times V_n + 4 - 4$

donc $V_{n+1} = \dfrac{1}{3} \times V_n$

donc la suite (V_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$
son premier terme est $V_0 = U_0 - 12 = 3 - 12 = -9$

b. Exprimer V_n puis U_n en fonction de n. 1pt

D'après le cours, lorsque V est géométrique de raison q et de premier terme V_0, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = q^n \times V_0$ donc ici $V_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n \times (-9)$

On peut simplifier en $V_n = \dfrac{1}{3^n} \times (-3^2)$ puis $V_n = -\dfrac{1}{3^{n-2}}$

Enfin, puisque $U_n = V_n + 12$ on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 12 - -\dfrac{1}{3^{n-2}}$