Contrôle No 1

EXERCICE 1 [3pts] Écrire sous forme canonique les fonctions suivantes :

$$P(x) = x^2 + 6x + 2 \qquad Q(x) = x^2 - 3x + 1 \qquad R(x) = 2x^2 + 8x + 16$$

$P(x) = (x+3)^2 - 3^2 + 2 = (x+3)^2 - 9 + 2 = (x+3)^2 - 7$

$Q(x) = (x-1{,}5)^2 - 1{,}5^2 + 1 = (x-1{,}5)^2 - 2{,}25 + 1 = (x-1{,}5)^2 - 1{,}25$

$R(x) = 2\left(x^2 + 4x + 8\right) = 2\left((x+2)^2 - 4 + 8\right) = 2\left((x+2)^2 + 4\right) = 2(x+2)^2 + 8$

EXERCICE 2 [4pts] Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on donne : $U_n = 5n + 4$

1. Calculer U_0, U_1, U_2, U_3.

   $U_0 = 5 \times 0 + 4 = 4 \quad U_1 = 5 \times 1 + 4 = 9 \quad U_2 = 5 \times 2 + 4 = 14 \quad U_3 = 5 \times 3 + 4 = 19.$

2. Exprimer U_{n+1} en fonction de n

   $U_{n+1} = 5 \times (n+1) + 4 = 5n + 5 + 4 = 5n + 9$

3. En déduire que $U_{n+1} - U_n = 5$

   $U_{n+1} - U_n = (5n+9) - (5n+4) = 5n + 9 - 5n - 4 = 5.$

4. A quelle famille appartient cette suite (U_n) ? Quelle est sa raison ?

   Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $U_{n+1} - U_n = 5$, la suite U est arithmétique de raison $R = 5$.

EXERCICE 3 [2pts] Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on donne : $U_{n+1} = 2U_n + 4$ et $U_0 = 3$

1. Calculer U_1, U_2, U_3.

   $U_1 = 2U_0 + 4 = 2 \times 3 + 4 = 6 + 4 = 10$ puis $U_2 = 2U_1 + 4 = 2 \times 10 + 4 = 24$

   et enfin $U_3 = 2U_2 + 4 = 2 \times 24 + 4 = 52$

2. Pourquoi cette suite n'est-elle pas arithmétique ?

   $U_1 - U_0 = 10 - 3 = 7$ mais $U_2 - U_1 = 24 - 10 = 14$ donc on ne passe pas d'un terme au suivant en ajoutant toujours la même quantité, la suite n'est pas arithmétique.

3. Pourquoi cette suite n'est-elle pas géométrique ?

   $\dfrac{U_1}{U_0} = \dfrac{10}{3} \approx 3{,}3$ mais $\dfrac{U_2}{U_1} = \dfrac{24}{10} = 2{,}4$ donc on ne passe pas d'un terme au suivant en multipliant toujours par la même quantité, la suite n'est pas géométrique.

EXERCICE 4 [3pts] Sachant que U est arithmétique, que $U_5 = 45$ et que $U_{10} = 125$,

1. Calculer R puis U_0 puis U_{32}

   $U_{10} = 125 = U_0 + 10R$ et $U_5 = 45 = U_0 + 5R$ donc par différence $80 = 5R$ donc $R = 16$

   Puis $U_5 = 45 = U_0 + 5R$ donc $45 - 5R = U_0$ donc $U_0 = -35$

   donc $U_{32} = -35 + 32 \times 16 = 477$

2. En déduire $S = U_0 + \cdots + U_{32}$

   $S = U_0 + \cdots + U_{32} = \dfrac{U_0 + U_{32}}{2} \times 33$ en effet de 0 à 32 il y a 33 termes

   donc $S = 7293$

EXERCICE 5 [4pts] Une voiture valant initialement 15000€ voit sa valeur diminuer de 20% tous les ans. On note $U_0 = 15000$ et U_n sa valeur après n années.

1. Calculer sa valeur après 1 an, après 2 ans.

   Réduire de 20% c'est multiplier par $\left(1 - \dfrac{20}{100}\right)$ c'est à dire par 0,8

   donc $U_1 = 0{,}8 \times U_0 = 0{,}8 \times 15000 = 12000$ la voiture vaut 12000 € la 1ère année

   puis $U_2 = 0{,}8 \times U_1 = 0{,}8 \times 12000 = 9600$ la voiture vaut 9600 € la 2ème année.

   On admet alors que U_n vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = 0{,}8 \times U_n$.

2. En déduire la définition directe de la suite U.

   La définition directe de la suite U est alors $U_n = U_0 \times q^n = 15000 \times 0{,}8^n$

3. Calculer alors U_{10}, U_{15} et U_{20}.

   On peut alors calculer $U_{10} = 15000 \times 0{,}8^{10} \approx 1610{,}61$

   $U_{15} = 15000 \times 0{,}8^{15} \approx 527{,}77$ et $U_{20} = 15000 \times 0{,}8^{20} \approx 172{,}94$

4. Cette modélisation est-elle crédible ?

   Cette simulation n'est pas très crédible car le prix devient bien trop faible même pour une vieille voiture de 20 ans.

EXERCICE 6 [4pts]

Au 1er janvier 2025, un arboriculteur possède 5 000 pommiers. Chaque année :

- il arrache 4 % des pommiers car ils sont endommagés ;
- il replante 300 nouveaux pommiers.

On modélise la situation par une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n représente le nombre de pommiers possédés par l'arboriculteur au 1er janvier de l'année $(2025+n)$.

On obtient ainsi une suite (u_n) telle que : $u_0 = 5\,000$ et $u_{n+1} = 0{,}96u_n + 300$, pour tout entier naturel n.

1. Calculer u_1 et u_2.

$u_1 = 0{,}96U_0 + 300 = 0{,}96 \times 5000 + 300 = 5100$ puis $u_2 = 0{,}96u_1 + 300 = 5196$

Combien de pommiers possèdera l'arboriculteur au 1er janvier 2026 ?

Le 1er janvier 2026, il aura $u_1 = 5100$ arbres.

2. On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 7\,500$, pour tout entier naturel n.

a. Montrer que $v_{n+1} = 0{,}96v_n$ En déduire la famille a laquelle appartient la suite (v_n). On précisera la raison et le premier terme v_0.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - 7\,500 \\
&= 0{,}96u_n + 300 - 7500 \\
&= 0{,}96u_n - 7200 \\
&= 0{,}96(v_n + 7500) - 7200 \\
&= 0{,}96v_n + 7200 - 7200 \\
&= 0{,}96v_n
\end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = 0{,}96$ etz $v_0 = v_0 - 7500 = -2500$

b. Donner la définition directe de la suite (v_n).

D'après ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$v_n = v_0 \times q^n = -2500 \times 0{,}96^n$$

c. En déduire que, pour tout entier naturel n : $u_n = 7\,500 - 2\,500 \times 0{,}96^n$.

Puisque $v_n = u_n - 7500$, on a $u_n = v_n + 7500$ or $u_n = -2500 \times 0{,}96^n$

donc $u_n = 7\,500 - 2\,500 \times 0{,}96^n$